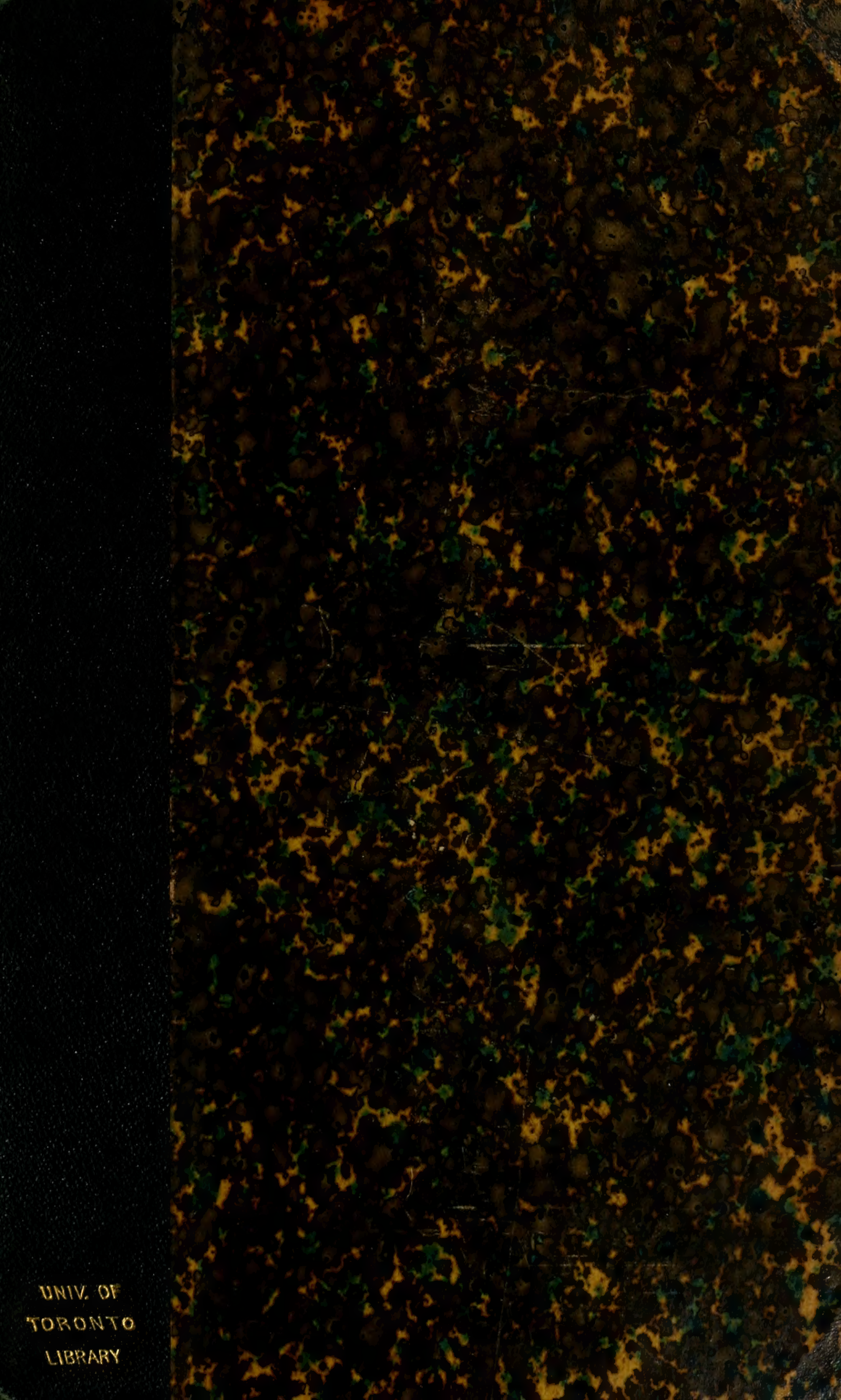
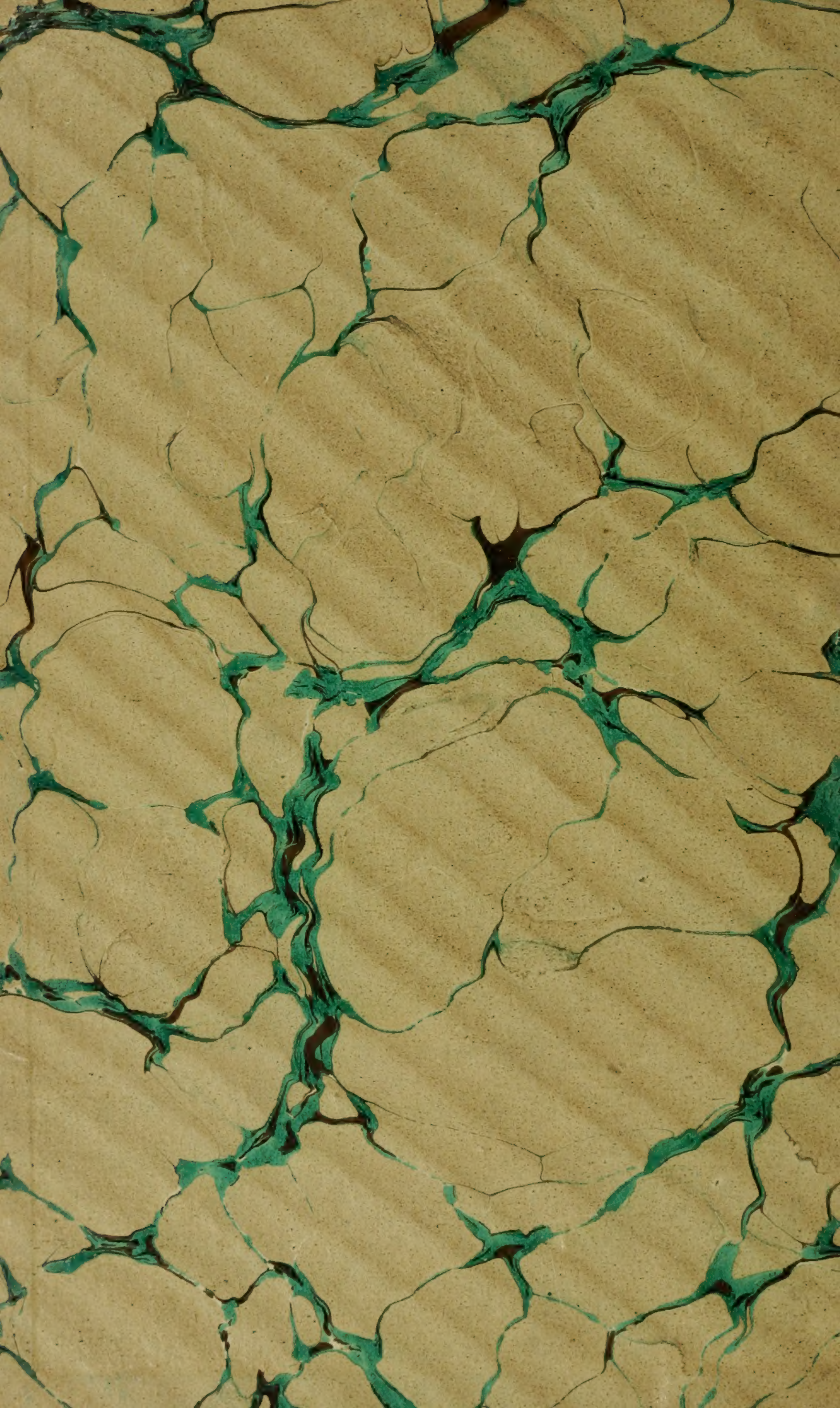


UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY





NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1888


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME SEPTIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LES ARCS DES COURBES PLANES;

Par M. G. HUMBERT.

Nous avons énoncé, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2e semestre 1887), un théorème qui constitue l'extension à une courbe algébrique quelconque de la célèbre proposition de Graves et Chasles, sur les arcs de conique : la démonstration de ce théorème généralisé peut être donnée d'une manière tout à fait élémentaire, de la manière suivante.

Nous nous appuierons sur une proposition, aujourd'hui bien connue et que Laguerre a énoncée le premier :

La somme des angles que font avec un axe fixe les rayons qui joignent le centre d'un cercle aux points d'intersection du cercle et d'une courbe algébrique donnée reste constante si le rayon du cercle varie, son centre demeurant fixe.

En transformant cette propriété par polaires réciproques, on voit que :

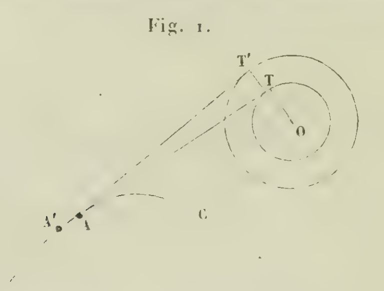
La somme des angles que font avec un axe fixe les tangentes communes à une courbe algébrique et à un cercle reste constante si le rayon du cercle varie, son centre demeurant fixe.

Cela posé, soit C une courbe algébrique quelconque; menons les tangentes communes à cette courbe et à deux cercles voisins de même centre O, de rayons R et R + dR. Soient AT et A′T′ deux de ces tangentes, infiniment voisines. On a évidemment

$$A'T' - AT = \text{arc}\, AA' + R . \widehat{TOT'}.$$

Or l'angle TOT′ est égal à celui des tangentes A′T′ et AT; soit $d\theta$ cet angle; il vient, en désignant par t la

Fig. 1.



longueur de la *tangente commune* AT, par $t + dt$ celle de A′T′, par ds l'arc AA′,

$$ds = dt - R\, d\theta.$$

Si l'on fait la somme de toutes les équations analogues, relatives à tous les points de contact de la courbe C avec les tangentes communes à cette courbe et au cercle R, il vient, puisque $\Sigma\, d\theta = 0$, d'après le théorème rappelé plus haut,

$$\Sigma\, ds = \Sigma\, dt.$$

En d'autres termes :

Si l'on mène toutes les tangentes communes à une courbe algébrique et à un cercle, et si l'on fait ensuite varier le rayon du cercle, son centre restant fixe, les points de contact sur la courbe décrivent des arcs dont

la somme algébrique est égale à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

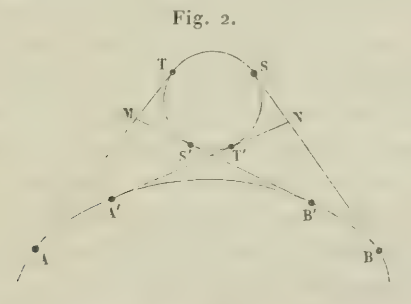
Si, en particulier, on suppose que l'un des cercles considérés a son rayon nul, on voit sans difficulté que :

Les 2ν points de contact d'une courbe de classe ν avec les tangentes communes à cette courbe et à un cercle peuvent être groupés deux à deux, de manière à déterminer sur la courbe ν arcs dont la somme algébrique est égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

C'est cette proposition qui, dans le cas des coniques, donne le théorème si connu sur les arcs d'ellipse ou d'hyperbole.

Considérons en effet une ellipse, menons les quatre tangentes communes à cette courbe et à un cercle.

Fig. 2.



Le théorème qui vient d'être démontré apprend qu'on a

$$\text{arc}\, AA' - \text{arc}\, BB' = AT - A'T' - BS + B'S.$$

ce qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}\text{arc}\, AB' - \text{arc}\, A'B &= (AM + MS') - A'T' - (BN - NT) + B'S \\ &= AM + B'M - (A'N - BN).\end{aligned}$$

ou enfin

$$AM + B'M - \text{arc}\, AB' = A'N + BN - \text{arc}\, A'B.$$

Si l'on remarque maintenant que, d'après un théorème connu, ces points M et N sont sur une même ellipse homofocale à la proposée, on voit que l'équation précédente revient précisément au théorème de Graves et de Chasles.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

PAR M. E. MARCHAND,
Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe, on considère toutes les cordes D *de cette surface qui sont vues du centre sous un angle droit et l'on demande :*

1° *L'équation du cône lieu géométrique des cordes* D *qui passent par un point* S, *ainsi que les positions du point* S *pour lesquelles le cône est de révolution;*

2° *La courbe à laquelle sont tangentes toutes les cordes* D *situées dans un plan donné* P, *ainsi que les positions du plan* P *pour lesquelles cette courbe est une parabole ou une circonférence de cercle.*

Remarque préliminaire. — Il est évident que l'énoncé est équivalent au suivant :

Étudier le complexe des cordes D *qui sont vues du centre sous un angle droit.*

On sait d'ailleurs que, pour traiter de pareilles questions, il est préférable de définir la droite par ses six

coordonnées homogènes, dont je vais rappeler la signification.

Posant, pour abréger,

$$[uv_1] = uv_1 - vu_1,$$

les six coordonnées homogènes de la droite

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$$

seront définies par deux plans

$$(u, v, w, p), \quad (u_1, v_1, w_1, p_1)$$

passant par la droite, ou par deux points

$$(x, y, z, t), \quad (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

situés sur la droite, au moyen des équations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = [vw_1] = [xt_1], \\ \beta = [wu_1] = [yt_1], \\ \gamma = [uv_1] = [zt_1], \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha' = [pu_1] = -[yz_1], \\ \beta' = [pv_1] = -[zx_1], \\ \gamma' = [pw_1] = -[xy_1]. \end{cases}$$

Tout complexe sera défini par une équation homogène

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = 0,$$

laquelle d'ailleurs peut, en général, être mise sous une infinité de formes différentes, grâce à la relation identique

$$(3) \qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Par exemple, prenant l'équation d'une quadrique sous la forme

$$(4) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 - K = 0,$$

on trouve facilement que le complexe des droites D vues

du centre sous un angle droit a pour équation

$$(5) \qquad l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 - K(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$
$$l = b + c, \qquad m = c + a, \qquad n = a + b.$$

1. D'après les relations (1) et (2), si l'on désigne par x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées du sommet S du cône du complexe, ce cône aura pour équation

$$(6) \qquad \begin{cases} l[yz_1]^2 + m[zx_1]^2 + n[xy_1]^2 \\ \quad = K[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]. \end{cases}$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente le système des deux plans tangents menés du point S au cône

$$(7) \qquad \frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 0,$$

lequel cône est l'enveloppe des plans passant par le centre de la quadrique et la coupant suivant une hyperbole équilatère. Ce cône, imaginaire dans le cas de l'ellipsoïde, n'est réel dans le cas de l'hyperboloïde que si le plus grand angle au sommet du cône asymptote de la quadrique donnée est obtus.

Le second membre représente une sphère de rayon nul et de centre S.

Si donc on fait varier K d'une manière arbitraire, ce qui revient à adjoindre à la quadrique de l'énoncé toutes les quadriques concentriques et homothétiques, l'équation (6) représente une famille de cônes homocycliques. Il est alors facile de savoir quand le cône (6) sera de révolution.

Un cône de révolution n'étant autre chose qu'un cône bitangent au cercle imaginaire de l'infini, si l'on cherche les trois systèmes de sections circulaires, on trouvera : 1° un système double correspondant à la corde des contacts lequel donne les parallèles de la surface de révolu-

tion; 2° un système simple composé de plans tangents au cercle imaginaire de l'infini menés par une parallèle à l'axe.

Le cône de sommet S sera de révolution : 1° si le premier membre de (6) représente un plan double; 2° si le premier membre de (6) représente deux plans tangents au cercle imaginaire de l'infini. Par suite de la signification géométrique indiquée plus haut, on voit que le cône sera de révolution :

1° Si le point S est situé sur le cône (7), auquel cas le plan tangent en S au cône (7) est perpendiculaire à l'axe;

2° Si le point S est situé sur l'une des focales du cône (7), auquel cas la focale est l'axe de révolution.

2. Je désigne par u_1, v_1, w_1, p_1 les coordonnées du plan P, et alors j'ai pour équation tangentielle de la courbe du complexe

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & l[up_1]^2 + m[vp_1]^2 + n[wp_1]^2 \\ & \quad = \mathrm{K}\left\{ [vw_1]^2 + [wu_1]^2 + [uv_1]^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre, égalé à zéro, donne une surface admettant le plan P comme plan double; c'est donc, en réalité, une courbe plane située dans le plan P. Cette courbe n'est autre chose que la section du cône (7) par le plan P, laquelle se réduira à un point double si le plan passe par le sommet du cône.

Le second membre, égalé à zéro, donne la courbe d'intersection du plan P et du cercle imaginaire de l'infini, c'est-à-dire les deux points circulaires relatifs à ce plan P.

L'équation (8), où K est un paramètre arbitraire, représente donc un système de coniques homofocales dont fait partie la section du cône (7) par le plan P.

Pour que la courbe du complexe soit une parabole, il faut que la section du cône (7) par le plan P soit elle-même une parabole. Le plan P doit donc être parallèle à un plan tangent au cône (7).

Pour que la courbe du complexe soit un cercle, il faut que la section du cône (7) par le plan P soit un cercle ou un point double. On a d'abord toutes les directions de section circulaire du cône (7). On a ensuite tous les plans passant par le sommet du cône (7), c'est-à-dire par le centre de la quadrique S.

Il est inutile de remarquer que le foyer de la parabole et le centre du cercle se confondent avec les points correspondants de la section homofocale déterminée dans le cône (7).

3. Une propriété très remarquable du complexe consiste en ce qu'il est à lui-même son propre polaire réciproque par rapport à huit quadriques.

En effet, cherchons le complexe polaire réciproque du complexe donné par rapport à la quadrique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont des paramètres indéterminés.

A un point x, y, z, t, on fera correspondre son plan polaire

$$U = \frac{x}{A}, \qquad V = \frac{y}{B}, \qquad W = \frac{z}{C}, \qquad P = -t,$$

de sorte que, en appelant α_1, β_1, γ_1, α'_1, β'_1, γ'_1 les nouvelles coordonnées d'une droite quelconque, on aura les formules de transformation

$$\alpha_1 = VW_1 - WV_1 = \frac{yz_1 - zy_1}{BC} = -\frac{\alpha'}{BC},$$

$$\alpha'_1 = PU_1 - UP_1 = \frac{-tx_1 + xt_1}{A} = \frac{\alpha}{A}.$$

L'équation du complexe devient

$$(9)\quad \begin{cases} l B^2 C^2 \alpha_1^2 + m C^2 A^2 \beta_1^2 + n A^2 B^2 \gamma_1^2 \\ \qquad - K(A^2 \alpha_1'^2 + B^2 \beta_1'^2 + C^2 \gamma_1'^2) = 0. \end{cases}$$

et il suffit de prendre

$$A^2 = \frac{K^2}{mn}, \qquad B^2 = \frac{K^2}{nl}, \qquad C^2 = \frac{K^2}{lm}$$

pour retrouver l'équation primitive (5).

Le complexe est donc à lui-même sa propre polaire réciproque par rapport aux huit quadriques

$$\pm x^2 \sqrt{mn} \pm y^2 \sqrt{nl} \pm z^2 \sqrt{lm} = K.$$

Il est alors facile de comprendre pourquoi, si l'on cherche d'une part le lieu des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans, d'autre part l'enveloppe des plans pour lesquels la courbe du complexe se réduit à deux points, on trouve la même surface.

Dans le cas particulier où

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = K$$

représente un ellipsoïde, on trouve une vraie surface des ondes qui correspond à la quadrique

$$lx^2 + my^2 + nz^2 = K.$$

Le cône asymptote de la surface des ondes est, comme on sait,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n}\right) = 0.$$

On retrouve ici le cône (7) qui intervenait si heureusement dans la solution du problème. Ce cône est cône asymptote de la surface des ondes et ses focales, dont il

a été parlé plus haut, sont les droites qui joignent le centre de la surface des ondes à ses points doubles.

Ces propriétés sont tout à fait semblables à celles du complexe des droites telles que les plans tangents menés par elles à une quadrique fixe soient rectangulaires. D'ailleurs, l'équation de ce complexe bien connu pouvant s'écrire

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = l\alpha^2 + m\beta^2 + n\gamma^2,$$

l'analogie qu'il présente avec le complexe actuel

$$l\alpha'^2 + m\beta'^2 + n\gamma'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

est manifeste.

On démontrerait donc sans peine cette très belle propriété que, dans le cas d'une surface des ondes ordinaire, toutes les droites du complexe pénètrent entre les deux nappes de cette surface.

On voit, d'ailleurs, qu'il y aurait probablement intérêt à étudier avec soin la forme des surfaces analogues à la surface des ondes que l'on rencontrerait en prenant pour quadrique initiale un hyperboloïde tel que le cône asymptote puisse être coupé suivant un angle droit par des plans réels.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1886;

PAR M. E. MARCHAND,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Caen.

1° *Étant donnés une surface du second ordre* S *et deux points* A, B, *on mène par le point* B *une sécante*

qui rencontre la surface S *aux points* C, C′ *et le plan polaire du point* A *au point* D,

Soient M *et* M′ *les points où la droite* AD *rencontre les plans qui touchent la surface* S *aux points* C *et* C′.

La sécante BD *tournant autour du point* B, *on demande le lieu décrit par les points* M *et* M′.

2° *Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre, dont l'une est indépendante de la position occupée par le point* B *dans l'espace, et dont l'autre* Σ *dépend de la position de ce point.*

Chercher ce que devient la surface Σ *quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point* A *le rôle du point* B, *et inversement.*

3° *Le point* A *restant fixe, déterminer les positions occupées par le point* B *quand la surface* Σ *n'a pas un centre unique à distance finie.*

Remarques préliminaires. — Étant donnés deux points $A(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $B(\xi, \eta, \zeta, \theta)$, on sait que, pour tout point $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ de la droite AB, on a

$$x_1 = \lambda\alpha - \mu\xi, \qquad y_1 = \lambda\beta - \mu\eta,$$
$$z_1 = \lambda\gamma - \mu\zeta, \qquad t_1 = \lambda\delta - \mu\theta.$$

Si M_1 coïncide avec un des points de rencontre de la droite AB avec une surface du second ordre S dont l'équation est

$$(S) \qquad f(x, y, z, t) = 0,$$

et qu'on pose, pour abréger l'écriture,

$$[\alpha x] = \tfrac{1}{2}(x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma + t f'_\delta)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z + \delta f'_t).$$

Le plan tangent en M_1 à la surface S sera défini par

$$[x_1 x] = 0, \qquad [x_1 x_1] = 0.$$

ou encore par

$$\lambda[\alpha x]-\mu[\xi x]=0, \qquad \lambda^2[\alpha\alpha]-2\lambda\mu[\alpha\xi]+\mu^2[\xi\xi]=0.$$

Éliminant λ et μ entre ces deux dernières équations, on obtiendra l'équation du système des deux plans tangents menés à S par les points P, Q où cette quadrique est rencontrée par AB,

$$[\alpha\alpha][\xi x]^2-2[\alpha\xi][\xi x][\alpha x]+[\xi\xi][\alpha x]^2=0.$$

1. Je désigne par les lettres suivantes les coordonnées des différents points qui ont à intervenir dans la solution

$$A(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\quad B(\xi,\eta,\zeta,\theta),\quad D(x_1,y_1,z_1,t_1),\quad M(x,y,z,t).$$

L'équation des plans tangents menés à S par les points C et C′ où elle est rencontrée par BD est

$$(1)\qquad [x_1x_1][\xi x]^2-2[x_1\xi][\xi x][x_1x]+[\xi\xi][x_1x]^2=0.$$

Le point D étant dans le plan polaire de A, on a

$$(2)\qquad [\alpha x_1]=0.$$

Enfin, les trois points A, D, M étant en ligne droite,

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1=\lambda x-\mu\alpha,\\ y_1=\lambda y-\mu\beta,\\ z_1=\lambda z-\mu\gamma,\\ t_1=\lambda t-\mu\delta.\end{cases}$$

Remplaçant, dans (1) et (2), les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 de D par leurs expressions (3) et éliminant ensuite les paramètres λ, μ, on aura l'équation du lieu géométrique cherché.

On obtient, à simple vue,

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} [\alpha x_1]=\lambda[\alpha x]-\mu[\alpha\alpha]=0,\\ [x_1x]=\lambda[xx]-\mu[\alpha x]=0,\\ [x_1\xi]=\lambda[\xi x]-\mu[\alpha\xi]=0.\end{cases}$$

Tenant compte de ces premières identités,

$$\begin{aligned}[x_1 x_1] &= \lambda^2[xx] - 2\lambda\mu[\alpha x] + \mu^2[\alpha\alpha] \\ &\equiv \lambda\{\lambda[xx] - \mu[\alpha x]\} - \mu\{\lambda[\alpha x] - \mu[\alpha\alpha]\} = \lambda[x_1 x].\end{aligned}$$

L'équation (1) devient

$$(1\ bis)\qquad [x_1 x]\{\lambda[\xi x]^2 - 2[\xi x_1][\xi x] + [\xi\xi][x_1 x]\} = 0.$$

2. Le lieu se compose donc de deux surfaces.

La première $[x_1 x] = 0$ est indépendante de la position du point B dans l'espace. Remplaçant x_1 par sa valeur (3) en fonction de λ, μ et tirant de (2 *bis*) les valeurs proportionnelles de λ, μ, il vient

$$[x_1 x] \equiv [\alpha\alpha][xx] - [\alpha x]^2 = 0.$$

C'est le cône circonscrit à S de sommet A.

Pour la seconde surface Σ, on a d'abord

$$[\xi\xi][x_1 x] - 2[\xi x_1][\xi x] + \lambda[\xi x]^2 = 0,$$

puis

$$[\xi\xi][x_1 x] - 2\lambda[\xi x]^2 + 2\mu[\xi\alpha][\xi x] + \lambda[\xi x]^2 = 0.$$

Finalement on trouve

$$(\Sigma)\qquad [\xi\xi]\{[\alpha\alpha][xx] - [\alpha x]^2\} - [\alpha\alpha][\xi x]^2 + 2[\alpha\xi][\xi x][\alpha x] = 0.$$

On voit immédiatement que le cône circonscrit à S de sommet A est coupé par Σ suivant deux courbes planes situées dans les plans

$$[\xi x]\{[\alpha\alpha][\xi x] - 2[\alpha\xi][\alpha x]\} = 0.$$

Le premier plan $[\xi x] = 0$ est le plan polaire de B; le second passe par l'intersection du plan polaire de A et du plan polaire de B, c'est-à-dire par la droite P'Q' polaire conjuguée de la droite AB par rapport à S. Pour définir ce plan avec plus de précision, je vais montrer qu'il appartient à un faisceau harmonique dans lequel

on connaît d'avance trois plans. En effet, si l'on introduit le plan P′Q′A qui a pour équation

$$[\alpha\alpha][\xi x] - [\alpha\xi][\alpha x] = 0,$$

on a quatre plans passant par P′Q′

$$[\xi x] = 0, \qquad [\xi x] - 2K[\alpha x] = 0,$$
$$[\alpha x] = 0, \qquad [\xi x] - K[\alpha x] = 0, \qquad K = \frac{[\alpha\xi]}{[\alpha\alpha]},$$

et donnant comme rapport anharmonique

$$\frac{\infty - 0}{\infty - 2K} : \frac{K - 0}{K - 2K} = -1.$$

On peut écrire ainsi l'équation de Σ

$$(4) \qquad [\alpha\alpha][\xi\xi][xx] = [\xi\xi][\alpha x]^2 - 2[\alpha\xi][\alpha x][\xi x] + [\alpha\alpha][\xi x]^2.$$

Si l'on fait jouer au point A le rôle du point B, et inversement, l'équation de Σ ne change pas.

Ce résultat remarquable permet d'affirmer, sans nouveau calcul, que le cône de sommet B circonscrit à S est coupé par Σ suivant deux courbes planes dont l'une est dans le plan polaire de A, l'autre dans un plan facile à définir par les propriétés des faisceaux harmoniques. La surface Σ est définie surabondamment, au point de vue géométrique, par ces quatre sections planes qui passent par une même droite P′Q′.

Reprenant l'équation de Σ sous la forme (4), je vois que le premier membre égalé à zéro donne la surface S; le second membre égalé à zéro représente le système des deux plans tangents menés à la surface S par les points P et Q où elle est rencontrée par AB.

Donc Σ passe par le quadrilatère gauche déterminé par les quatre génératrices de S qui passent en P et Q. Les diagonales PQ, P′Q′ du quadrilatère gauche sont

évidemment deux droites polaires conjuguées par rapport à S et à Σ. Si donc on divise harmoniquement le segment PQ d'une part, le segment P'Q' d'autre part, on aura quatre points qui seront les quatre sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces : par suite, S et Σ admettent une infinité de tétraèdres conjugués communs. On sait que, en ne considérant, bien entendu, que le cas des points A et B réels, une quadrique non réglée (ellipsoïde, hyperboloïde à deux nappes, paraboloïde elliptique) est telle que de deux droites conjuguées l'une rencontre en deux points réels, l'autre en deux points imaginaires; pour une quadrique réglée ou complètement imaginaire (ellipsoïde imaginaire, hyperboloïde à une nappe, paraboloïde hyperbolique), les quatre points de rencontre P, Q, P', Q' sont tous réels ou tous imaginaires. Il en résulte que les surfaces S et Σ sont simultanément réglées ou non réglées ; en particulier, si Σ devient un paraboloïde, ce paraboloïde sera hyperbolique ou elliptique suivant que S sera réglée ou non.

Mais il reste à résoudre cette question. Toutes les surfaces Σ ont, avec S, un quadrilatère gauche commun ; ne peut-on pas affirmer que, réciproquement, toute quadrique ayant un quadrilatère gauche commun avec S soit susceptible du mode de génération des surfaces Σ? Afin de traiter plus facilement cette question, je prendrai comme tétraèdre de référence un tétraèdre conjugué par rapport à S et ayant deux de ses sommets sur AB, ce qui suppose naturellement que S soit une surface sans point double, et que AB ne soit pas tangente à S :

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \xi = \eta = 0.$$

On obtient, par des réductions faciles, cette nouvelle

équation de Σ

$$(5) \qquad [\alpha\alpha][\xi\xi](ax^2+by^2)+[\alpha\xi]^2(cz^2+dt^2)=0,$$

$$[\alpha\alpha]=c\gamma^2+d\delta^2, \qquad [\xi\xi]=c\zeta^2+d\theta^2, \qquad [\alpha\xi]=c\gamma\zeta+d\delta\theta.$$

Ce résultat nouveau est de la forme

$$(5) \qquad T+\lambda T'=0, \qquad \lambda=\frac{[\alpha\xi]^2}{[\alpha\alpha][\xi\xi]},$$

$T=0$ représentant le système des deux plans tangents menés à S par AB; $T'=0$, le système des deux plans tangents menés à S aux points de rencontre avec AB. Si donc on démontre que le paramètre λ peut prendre toutes les valeurs imaginables, l'équation (5) de Σ représentera bien un faisceau de quadriques passant par quatre génératrices de S qui ne sont d'ailleurs assujetties qu'à la condition de former un quadrilatère gauche.

Or on sait (*Leçons sur la Géométrie*; par A. Clebsch, t. I, p. 95) que, si la droite AB rencontre en P et Q la surface S et qu'on désigne par ρ le rapport anharmonique formé par les points A, B avec les points P, Q, on a

$$(\rho+1)^2[\alpha\alpha][\xi\xi]-4[\alpha\xi]^2\rho=0.$$

Même en laissant A fixe, on pourrait disposer de B de manière que ρ et, par suite, $\lambda=\frac{(\rho+1)^2}{4\rho}$ aient une valeur choisie d'avance. Mais il est bien remarquable qu'on retrouve la même surface Σ toutes les fois que les points A et B, restant sur une droite fixe PQ, se déplacent de manière à donner constamment le même rapport anharmonique avec les points P et Q d'intersection de la droite fixe avec S.

En résumé, toute surface du second ordre ayant un quadrilatère gauche commun avec S est susceptible, et cela d'une infinité de manières, du mode de génération indiqué par l'énoncé du problème. Les points A et B doivent être pris sur une des diagonales du quadrilatère

gauche de manière à former avec les deux sommets situés sur cette diagonale un certain rapport anharmonique.

3. Si la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie, elle est tangente au plan de l'infini. Pour résoudre le problème proposé, je vais d'abord former l'équation tangentielle de Σ, puis j'exprimerai que le plan de l'infini vérifie cette équation tangentielle.

L'équation de Σ peut s'écrire

$$(4)\qquad \Sigma = l[xx] + m[\alpha x]^2 + 2n[\alpha x][\xi x] + h[\xi x]^2 = 0,$$

$$(5)\qquad l = [\alpha\alpha][\xi\xi], \quad m = -[\xi\xi], \quad n = [\alpha\xi], \quad h = -[\alpha\alpha].$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = \tfrac{1}{2} l \frac{\partial f}{\partial x} + m[\alpha x]\tfrac{1}{2} f'_\alpha + n\left\{[\alpha x]\tfrac{1}{2} f'_\xi + [\xi x]\tfrac{1}{2} f'_\alpha\right\} + h[\xi x]\tfrac{1}{2} f'_\xi.$$

Posant, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} m\alpha + n\xi = x_1, & m\beta + n\eta = y_1, & m\gamma + n\zeta = z_1, & m\delta + n\theta = t_1, \\ n\alpha + h\xi = x_2, & n\beta + h\eta = y_2, & n\gamma + h\zeta = z_2, & n\delta + h\theta = t_2, \end{cases}$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = \tfrac{1}{2} l \frac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{1}{2} f'_{x_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2} f'_{x_2}[\xi x].$$

Désignant par u, v, w, p les coordonnées d'un plan tangent à z, on sait qu'on aura les équations

$$\begin{aligned} &l(A\,x + B''y + B'z + C\,t) + \tfrac{1}{2} f'_{x_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2} f'_{x_2}[\xi x] + \lambda u = 0, \\ &l(B''x + A'y + B\,z + C't) + \tfrac{1}{2} f'_{y_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2} f'_{y_2}[\xi x] + \lambda v = 0, \\ &l(B'x + By + A''z + C''t) + \tfrac{1}{2} f'_{z_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2} f'_{z_2}[\xi x] + \lambda w = 0, \\ &l(C\,x + C'y + C''z + Dt) + \tfrac{1}{2} f'_{t_1}[\alpha x] + \tfrac{1}{2} f'_{t_2}[\xi x] + \lambda p = 0, \\ &\qquad \tfrac{1}{2} f'_\alpha x + \tfrac{1}{2} f'_\beta y + \tfrac{1}{2} f'_\gamma z + \tfrac{1}{2} f'_\delta t - [\alpha x] = 0, \\ &\qquad \tfrac{1}{2} f'_\xi x + \tfrac{1}{2} f'_\eta y + \tfrac{1}{2} f'_\zeta z + \tfrac{1}{2} f'_\theta t - [\xi x] = 0, \\ &\qquad\qquad ux + vy + wz + pt = 0. \end{aligned}$$

Considérant x, y, z, t, $[\alpha x]$, $[\xi x]$ et λ comme des inconnues distinctes, on a sept équations linéaires homogènes à sept inconnues, d'où l'équation tangentielle

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} lA & lB'' & lB' & lC & \frac{1}{2}f'_{x_1} & \frac{1}{2}f'_{x_2} & u \\ lB'' & lA' & lB & lC' & \frac{1}{2}f'_{y_1} & \frac{1}{2}f'_{y_2} & v \\ lB' & lB & lA'' & lC'' & \frac{1}{2}f'_{z_1} & \frac{1}{2}f'_{z_2} & w \\ lC & lC' & lC'' & lD & \frac{1}{2}f'_{t_1} & \frac{1}{2}f'_{t_2} & p \\ \frac{1}{2}f'_\alpha & \frac{1}{2}f'_\beta & \frac{1}{2}f'_\gamma & \frac{1}{2}f'_\delta & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f'_\xi & \frac{1}{2}f'_\eta & \frac{1}{2}f'_\zeta & \frac{1}{2}f'_\theta & 0 & -1 & 0 \\ u & v & w & p & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Posant, pour abréger,

$$P = ux + vy + wz + pt,$$
$$P_1 = ux_1 + vy_1 + wz_1 + pt_1,$$
$$P_2 = ux_2 + vy_2 + wz_2 + pt_2,$$

on obtient d'abord, en tenant compte de (5) et de (6),

$$l \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & 0 & 0 & u \\ B'' & A' & B & C' & 0 & 0 & v \\ B' & B & A'' & C'' & 0 & 0 & w \\ C & C' & C'' & D & 0 & 0 & p \\ \frac{1}{2}f'_\alpha & \frac{1}{2}f'_\beta & \frac{1}{2}f'_\gamma & \frac{1}{2}f'_\delta & -[\alpha\xi]^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f'_\xi & \frac{1}{2}f'_\eta & \frac{1}{2}f'_\zeta & \frac{1}{2}f'_\theta & 0 & -[\alpha\xi]^2 & 0 \\ u & v & w & p & -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Supprimant le facteur l et posant

$$P_\alpha = u\alpha + v\beta + w\gamma + p\delta, \qquad P_\xi = u\xi + v\eta + w\zeta + p\theta,$$

on obtient facilement

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & 0 & 0 & u \\ B'' & A' & B & C' & 0 & 0 & v \\ B' & B & A'' & C'' & 0 & 0 & w \\ C & C' & C'' & D & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -[\alpha\xi]^2 & 0 & -P_\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\alpha\xi]^2 & -P_\xi \\ u & v & w & p & -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les colonnes 5 et 6 contenant beaucoup de zéros, il est naturel de développer suivant les éléments de ces deux colonnes, par la règle de Laplace. On trouve très facilement que, si l'on désigne par H le hessien de la surface S, et par $\varphi(u, v, w, p)$ le déterminant qui, égalé à zéro, donne l'équation tangentielle de S, on obtient, après suppression de $[\alpha\xi]^2$, l'expression

$$(8) \qquad [\alpha\xi]^2 \varphi(u, v, w, p) + H(P_1 P_\alpha + P_2 P_\xi) = 0.$$

Mais, d'après (6),

$$P_1 = -[\xi\xi] P_\alpha + [\alpha\xi] P_\xi, \qquad P_2 = [\alpha\xi] P_\alpha - [\alpha\alpha] P_\xi.$$

et l'équation tangentielle de Σ devient définitivement

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha\xi]^2 \varphi(u, v, w, p) \\ \quad + H \left\{ -[\xi\xi] P_\alpha^2 + 2[\alpha\xi] P_\alpha P_\xi - [\alpha\alpha] P_\xi^2 \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Pour déterminer, le point A restant fixe, les positions occupées par le point B quand la surface Σ reste tangente à un plan fixe, il suffit de considérer, dans (9), u, v, w, p comme des constantes, et d'y faire $\xi = x$. Il vient

$$(9\,bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} H P_\alpha^2 [xx] = \varphi(v, w, p)[\alpha x]^2 \\ \qquad\qquad + 2 H P_\alpha [\alpha x] P_x - H[\alpha\alpha] P_x^2. \end{array} \right.$$

Le premier membre égalé à zéro donne la surface primitive S; le second membre égalé à zéro donne le système des deux plans tangents menés à S par les points où cette surface est rencontrée par la droite qui joint le point A au pôle K du plan fixe u, v, w, p. En effet, désignant par x', y', z', t' les coordonnées de K, on sait que

$$u = \tfrac{1}{2} f'_{x'}, \qquad v = \tfrac{1}{2} f'_{y'}, \qquad w = \tfrac{1}{2} f'_{z'}, \qquad p = \tfrac{1}{2} f'_{t'}.$$

Remplaçant u, v, w, p par ces valeurs et s'appuyant sur

l'identité bien connue

$$(10)\quad \varphi(u, v, w, p) = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \frac{1}{2}f'_{x'} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} - H[x'x'],$$

on obtient, en place de (9 *bis*), l'équation toute simple.

$$(11)\quad -[\alpha x']^2[xx] = [x'x'][\alpha x]^2 - 2[\alpha x'][\alpha x][x'x] + [\alpha\alpha][x'x]^2.$$

L'analogie avec (4) est frappante. Comme plus haut, si l'on prend

$$(\mathrm{S})\qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$\alpha = \beta = 0, \qquad x' = y' = 0,$$

on obtient, sans avoir à recommencer les calculs,

$$(12)\quad [\alpha x']^2(ax^2 + by^2) + [\alpha\alpha][x'x'](cz^2 + dt^2) = 0.$$

Alors il est inutile de reprendre ce qui a été dit à propos de l'équation (5) pour déduire de (12) les conclusions suivantes :

Toute quadrique ayant avec S un quadrilatère gauche commun peut être obtenue comme lieu des points B, tels que, A restant fixe, la surface Σ reste tangente à un certain plan donné. Il faut que le pôle K du plan donné et le point A soient situés sur une des diagonales du quadrilatère gauche et forment avec les sommets correspondants un rapport anharmonique déterminé.

Revenant à l'énoncé, on peut dire que la surface lieu des points B, tels que, A restant fixe, Σ n'ait pas un centre unique à distance finie, peut coïncider successivement avec toutes les quadriques qui ont en commun avec S un quadrilatère gauche dont une diagonale passe par le centre de la surface S.

4. Chaque surface ayant avec S un quadrilatère gauche

commun, dont PQ, P′Q′ sont les diagonales, peut être obtenue de quatre manières différentes; on peut prendre A et B ou A et K sur PQ; on peut prendre A et B ou A et K sur P′Q′. Si, dans chaque cas, les quatre points situés sur la diagonale donnent naissance au même rapport anharmonique, quelle relation existe-t-il entre les quatre surfaces particulières obtenues?

Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur la forme très simple que prend l'équation Σ′ de la polaire réciproque de Σ par rapport à S. On sait qu'il suffira de poser, dans l'équation tangentielle de Σ,

$$(13)\qquad u = \tfrac{1}{2}f'_x,\qquad v = \tfrac{1}{2}f'_y,\qquad w = \tfrac{1}{2}f'_z,\qquad p = \tfrac{1}{2}f'_t.$$

Or, tenant compte de l'identité (10), on voit que (9) devient, par la substitution (13),

$$(14)\quad -[\alpha\xi]^2[xx] = [\xi\xi][\alpha x]^2 - 2[\alpha\xi][\alpha x][\xi x] + [\alpha\alpha][\xi x]^2.$$

C'est l'équation (11), où x' a été remplacé par ξ.

Si donc on prend A et B d'une part, A et K d'autre part, sur la même diagonale et que le rapport anharmonique soit égal de part et d'autre, on obtient deux surfaces polaires réciproques par rapport à S.

S'appuyant sur les formes réduites (5) et (12), on voit facilement que, si l'on prend deux points A et B sur PQ, deux points A′ et B′ sur P′Q′ et que les rapports anharmoniques soient les mêmes, on a encore deux surfaces polaires réciproques.

On aura, au contraire, la même surface si l'on prend deux points A et B sur l'une des diagonales, deux points A et K sur l'autre, les rapports anharmoniques étant égaux de part et d'autre.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

1. M. H. A. Schwarz a donné, dans les *Annali di Matematica* de Brioschi (série II, t. X), le théorème suivant :

Soient $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ *des fonctions réelles d'une même variable réelle* t. *On suppose que ces fonctions, de même que leurs dérivées jusqu'à l'ordre* $n-1$ *inclusivement, sont finies et continues.*

Dans ces conditions, si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *sont* n *valeurs différentes appartenant à l'intervalle* $a, \ldots, b$, *le quotient*

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \ldots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \ldots & f_n(t_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \ldots & f_n(t_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{n-1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & t_n & t_n^2 & \ldots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas plus grand que $\dfrac{M}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$ *et pas plus petit que* $\dfrac{m}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}$, M *désignant la plus grande,* m *la plus petite des valeurs du déterminant*

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & f'_2(t'') & \ldots & f'_n(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

sous les conditions

$$a \leqq t' \leqq b, \quad t' \leqq t'' \leqq b, \quad t'' \leqq t''' \leqq b, \quad \ldots, \quad t^{(n-1)} \leqq t^{(n)} \leqq b.$$

Comme le remarque M. Schwarz, ce théorème permet d'établir, d'une manière rigoureuse, certaines propositions fondamentales dans la théorie des courbes planes ou gauches. Soit, par exemple, M un point d'une courbe gauche, et prenons sur cette courbe trois points infiniment voisins de M. Le plan osculateur en M est la position limite du plan qui passe par les trois derniers points. A l'aide du théorème de M. Schwarz, on reconnaît aussi clairement les conditions dans lesquelles cette proposition est exacte.

2. La démonstration que M. Schwarz a donnée de son théorème est extrêmement simple. La circonstance qu'elle exige des intégrations nous a conduit à chercher si l'on ne pourrait pas arriver au but d'une manière plus élémentaire.

Nous avons reconnu alors que le quotient considéré est égal à

$$\frac{1}{1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} f_1(t') & f_2(t') & \ldots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & f'_2(t'') & \ldots & f'_n(t'') \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}) & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} t' &= t_1, \\ t'' &= (t_1, t_2), \\ t''' &= (t_1, t_2, t_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t^{(n)} &= (t_1, t_2, \ldots, t_n), \end{aligned}$$

$(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ désignant un nombre compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_k$.

3. La démonstration de ce théorème s'appuie principalement sur le lemme suivant.

Si une fonction $f(t)$ s'annule pour n valeurs diffé-

rentes de la variable

$$f(t_1) = 0, \qquad f(t_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad f(t_n) = 0,$$

alors on a

$$f^{(n-1)}(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Il faut supposer que la fonction $f(t)$ admet des dérivées $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{n-2}(t)$ qui sont finies et continues et que $f^{n-2}(t)$ admet encore une dérivée finie $f^{n-1}(t)$, mais on n'a pas à supposer que $f^{n-1}(t)$ soit continue.

En effet, soit, par exemple, $n = 3$ et

$$t_1 < t_2 < t_3.$$

Ayant

$$f(t_1) = 0, \qquad f(t_2) = 0, \qquad f(t_3) = 0,$$

on en conclut d'abord

$$f'(t') = 0, \qquad f'(t'') = 0,$$

t' étant compris entre t_1 et t_2 (en excluant les limites), et t'' entre t_2 et t_3. Ayant donc

$$t' < t'',$$

on voit ensuite que la fonction $f''(t)$ doit s'annuler pour une valeur de la variable comprise entre t' et t'', valeur qui sera comprise aussi entre t_1 et t_3.

4. En s'appuyant sur ce lemme, la démonstration du théorème énoncé est très facile. Nous supposerons $n = 4$, et posons

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(t) & g(t) & h(t) & k(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = \text{A}.$$

Considérons la fonction

$$F(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} A.$$

Il est clair qu'on a identiquement

$$F(x) = 0, \qquad F(y) = 0, \qquad F(z) = 0,$$

et encore, à cause de la valeur A,

$$F(t) = 0.$$

On en conclut

$$F'''(\zeta) = 0,$$

où

$$\zeta = (x, y, z, t),$$

ce qui revient à

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(z) & g(z) & h(z) & k(z) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} A = 0.$$

Soit maintenant

$$\mathcal{G}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & u & u^2 \end{vmatrix} A.$$

Il est donc clair qu'on a

$$\mathcal{G}(x) = 0, \qquad \mathcal{G}(y) = 0, \qquad \mathcal{G}(z) = 0;$$

donc

$$\mathcal{G}''(\eta) = 0,$$

où

$$\eta = (x, y, z).$$

On a, par conséquent,

$$(3)\quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(y) & g(y) & h(y) & k(y) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} A = 0.$$

Considérons enfin la fonction

$$\mathfrak{F}(u) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f(u) & g(u) & h(u) & k(u) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.2.1.2.3 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & u \end{vmatrix} A.$$

Il est clair qu'on a

$$\mathfrak{F}(x) = 0, \qquad \mathfrak{F}(y) = 0;$$

donc

$$\mathfrak{F}'(\xi) = 0,$$

où

$$\xi = (x, y).$$

Or cela revient à

$$(4)\quad \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) & k(x) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) & k'(\xi) \\ f''(\eta) & g''(\eta) & h''(\eta) & k''(\eta) \\ f'''(\zeta) & g'''(\zeta) & h'''(\zeta) & k'''(\zeta) \end{vmatrix} - 1.1.2.1.2.3\, A = 0.$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé.

On remarquera que cette démonstration suppose seulement que les dérivées secondes

$$f''(t), \quad g''(t), \quad h''(t), \quad k''(t)$$

admettent des dérivées

$$f'''(t), \quad g'''(t), \quad h'''(t), \quad k'''(t);$$

mais il n'est pas nécessaire de supposer que ces dernières fonctions soient continues.

Mais, si l'on ajoute cette dernière condition [la conti-

nuité de $f'''(t)$, $g'''(t)$, $h'''(t)$, $k'''(t)$], on conclut directement que, si x, y, z, t tendent vers une même limite a, on a

$$\lim A = \frac{1}{1.1.2.1.2.3}\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) & k(a) \\ f'(a) & g'(a) & h'(a) & k'(a) \\ f''(a) & g''(a) & h''(a) & k''(a) \\ f'''(a) & g'''(a) & h'''(a) & k'''(a) \end{vmatrix}.$$

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES;

PAR M. H. FAURE.

---

1. THÉORÈME. — *Étant données trois coniques* A, A′, A″ *circonscrites à un quadrilatère et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *passant par les intersections de* U *et de* A, *les points d'intersection de* B *et* A′ *et ceux de* U *et* A″ *sont sur une même conique.*

Soit, en effet,

$$A = \lambda A' - \mu A''$$

l'équation de la conique A et

$$B = A - \nu U$$

celle de B. Il existe une conique passant par les intersections de B et A′ qui a pour équation

$$B - \lambda A' = 0,$$

c'est-à-dire

$$A - \nu U - \lambda A' = \lambda A' - \mu A'' - \nu U - \lambda A' = \mu A'' - \nu U = 0,$$

ce qui démontre le théorème. Remarquons, du reste, que notre énoncé rentre dans celui de Chasles (*Sections coniques,* p. 276, n° 404). Nous avons, en effet, ici

quatre coniques A′, A″, B, U, telles que les points d'intersection de A′ et A″ et ceux de B et U sont sur A ; il en sera, par suite, de même des points d'intersection de ces coniques combinées deux à deux d'une autre manière, par exemple B et A′ et U et A″.

Ce simple changement dans l'énoncé de Chasles donne lieu, cependant, à un grand nombre de conséquences qui ne se trouvent pas dans le *Traité des sections coniques*.

2. *Cas particuliers.* — Prenant pour U une conique ayant un double contact avec A, on voit que :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont circonscrites à un quadrilatère, si une conique* U *tangente à* A *aux points* α, β *rencontre la seconde* A′ *aux points* a, b, c, d, *il existe une conique passant par ces quatre points et bitangente à la troisième* A″ *aux points où cette troisième conique est coupée par la droite* $\alpha\beta$.

Si l'on prend pour la conique U les deux tangentes à la conique A menées aux points α, β, on obtient un théorème donné par M. Weill (*Nouvelles Annales*, p. 20; janvier 1884), et dont ce géomètre déduit d'intéressantes applications.

On peut prendre pour A, A′, A″ des systèmes de droites; donc :

Étant donnés un quadrilatère et une conique U, *si l'on décrit une conique* B *passant par les intersections de* U *avec deux côtés opposés du quadrilatère, les quatre points d'intersection de* B *avec les deux autres côtés opposés et les quatre points d'intersection de* U *avec les diagonales du quadrilatère sont huit points d'une même conique.*

Prenant pour A et A′ les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à A″, et pour U une droite double tangente à A″, on est conduit à cet énoncé :

Une conique A″ *étant circonscrite à un quadrilatère, si en un point a de cette conique on lui mène une tangente et que l'on trace une conique* B *touchant deux côtés opposés du quadrilatère aux points où ces côtés sont coupés par la tangente, cette conique rencontrera les deux autres côtés opposés du quadrilatère en quatre points qui, avec le point de contact a, seront sur une conique ayant avec* A″ *un contact du troisième ordre.*

Prenons pour A′ et A″ deux cercles concentriques, et pour A la droite de l'infini, il s'ensuit que :

Étant données une hyperbole et ses asymptotes, si l'on décrit un cercle rencontrant l'hyperbole aux points a, b, c, d, et un second cercle concentrique au premier rencontrant les asymptotes aux points a′, b′, c′, d′, ces huit points sont sur un conique.

3. On sait que le cercle orthoptique d'une conique (c'est-à-dire le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits) passe par les points d'intersection de la conique avec ses directrices.

De là nous déduisons ces théorèmes :

Étant donnés une conique A *et un cercle* U, *si par les points d'intersection de ces deux courbes on trace une conique* B, *les points où cette conique* B *rencontre les directrices sont sur un cercle qui passe par les intersections du cercle* U *avec le cercle orthoptique de* A.

Si l'on mène à une conique une tangente en un de ses points m rencontrant les directrices aux points a et b, le cercle qui passe par ces points a et b et qui a

son centre sur la perpendiculaire menée aux directrices par le point m, rencontre le cercle orthoptique de la conique aux mêmes points que le cercle de courbure en m.

Étant données deux coniques A *et* U, *si sur* U *on prend les quatre points a, b, c, d, d'où l'on voit* A *sous un angle droit :* 1° *les points d'intersection de* A *et* U, *et les points d'intersection des deux cordes ab, cd avec les directrices sont huit points d'une même conique;* 2° *les points d'intersection de ces mêmes cordes avec* A *et les points d'intersection de* U *avec les directrices sont huit points d'une même conique.*

Si d'un point m on mène à une conique A *deux tangentes rectangulaires, par les points d'intersection de ces tangentes avec les directrices de* A, *on peut mener une conique ayant un double contact avec le cercle orthoptique de* A; *la corde de contact est la polaire du point m par rapport à* A.

4. Théorème corrélatif. — *Étant données trois coniques* A, A′, A″ *inscrites à un quadrilatère et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *inscrite au quadrilatère circonscrit à* U *et* A, *les tangentes communes à* B *et* A′ *et celles communes à* U *et* A″ *touchent une même conique.*

Pour simplifier les énoncés des théorèmes que nous déduirons de celui-ci, nous dirons que les sommets du quadrilatère circonscrit à la conique A et à une conique *fixe* sont les foyers de la conique A. De même, toutes les coniques inscrites à un même quadrilatère circonscrit à la conique fixe seront dites *homofocales*.

En supposant que la conique fixe se réduise aux ombilics du plan, on revient aux définitions usuelles.

Supposons donc que, dans le théorème énoncé ci-

dessus, nous considérions A″ comme la conique fixe, nous pourrons dire :

5. *Étant données deux coniques homofocales* A, A′ *et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *inscrite au quadrilatère circonscrit à* U *et* A, *les tangentes communes à* B *et* A′ *toucheront une conique homofocale à* U.

Ou bien :

Trois coniques A, B, U *étant inscrites à un quadrilatère* Q, *si l'on décrit une conique* A′ *homofocale à* A, *on pourra, au quadrilatère* P *circonscrit à* B *et* A′, *inscrire une conique homofocale à* U.

6. Puisque l'on peut inscrire à P une conique homofocale à U et que U est une conique quelconque inscrite au quadrilatère Q, on doit en conclure que le lieu des foyers des coniques inscrites à P est le même que le lieu des foyers des coniques inscrites à Q. D'autre part, la conique A′ peut aussi être prise arbitrairement pourvu qu'elle reste homofocale à A. Il en résulte que : *le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques* A *et* U *ne change pas si l'on remplace ces deux coniques par deux autres respectivement homofocales.*

On sait aussi que le lieu des foyers (dans le sens que nous leur donnons ici) des coniques inscrites à un quadrilatère est une cubique qui passe par les sommets du quadrilatère, et l'on peut ajouter par les six points de contact des coniques du système avec la conique fixe.

Par conséquent : *Si l'on considère deux systèmes de coniques respectivement homofocales, les points d'intersection des tangentes communes à une conique quel-*

conque du premier système et à une conique quelconque du second restent sur une cubique qui coïncide avec le lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère déterminé par les quatre tangentes communes à deux quelconques des coniques.

On peut dire encore : *Si l'on considère deux systèmes de coniques respectivement homofocales, les points de contact des coniques du premier système avec celles du second sont sur la cubique précédente.*

Si, dans le théorème général (4), on prend pour U un point, on obtient les théorèmes VIII et IX donnés par M. Weill, dans l'article cité plus haut, et, par suite, les théorèmes X et XI.

Les applications de ce théorème sont fort nombreuses; pour terminer nous en citerons encore quelques-unes.

7. *Deux coniques* A, A′ *étant homofocales, si par un point m de* A *on mène deux tangentes à* A′, *il existe une conique ayant pour foyer le point de contact, qui passe en m et qui, en ce point, a un contact du troisième ordre avec* A.

8. *Des coniques* $U, U_1, U_2, \ldots$ *touchant aux points a et b les droites ma, mb, par le point m passent des coniques* $A, A_1, A_2, \ldots$ *respectivement homofocales aux premières. Ces coniques forment deux séries. Celles d'une même série ont l'une avec l'autre un contact du troisième ordre.*

De là résulte que : *le lieu des foyers des coniques qui ont avec une conique donnée* A *un contact du troisième ordre en un point donné m de cette conique est le même que celui des points de contact des tangentes menées du point m à un système de coniques homofocales à la conique* A.

9. Étant donné un système A de coniques homofocales, on sait que le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point m à toutes les coniques du système est une cubique C; or, si l'on désigne par a et b les points de contact sur l'une des coniques et que l'on décrive toutes les coniques U qui ont pour foyers les deux points a et b, le lieu des points de contact des tangentes menées du point m aux coniques U sera la même cubique C. Il y a donc une infinité de manières de décrire cette cubique, à l'aide d'un même mode de génération.

Remarque. — La solution de la question 1567 résulte du n° 6 en donnant au mot *foyer* son sens ordinaire. La première Partie avait déjà été indiquée par Steiner sous une autre forme. En 1854, les *Nouvelles Annales* avaient proposé cette question (n° 272) : *Les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère étant désignés par* a, α; b, β; c, γ, *on a la relation*

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c} = \frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$

Il suffisait de prouver que c et γ étaient les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère $ab\alpha\beta$. J'ai donné en 1855 une solution analytique de cette question (p. 97). C'est en cherchant une solution géométrique du problème que j'étais arrivé depuis longtemps aux résultats (6). Le théorème du n° 7 figure dans notre recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques, publié en 1867.

THÉORÈME DE MINDING;

Par M. A. ASTOR,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Nous nous proposons de donner une démonstration simple du théorème suivant, dû à Minding :

Si un corps solide est sollicité, en ses divers points, par des forces indépendantes de l'orientation du corps, on peut l'amener dans une infinité de positions telles que le système de ces forces ait une résultante unique. Cette résultante rencontre toujours une ellipse et une hyperbole fixes dans le corps.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Le système des forces considérées peut être remplacé par une force R égale à leur résultante de translation et appliquée en un point déterminé du solide et par deux couples (aa', P, P'), (bb', Q, Q') dont les bras aa', bb' sont deux droites rectangulaires et invariables du solide, les forces P et Q qui les constituent étant indépendantes de l'orientation du solide et formant avec R un système de trois droites rectangulaires.

Considérons en effet le solide dans une de ses positions, rapportons-le à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz dont l'un Oz soit parallèle à la résultante de translation. Soient x, y, z les coordonnées d'un point et X, Y, Z les composantes de la force qui lui est appliquée. Menons, dans le plan xy, deux axes rectangulaires Ox', Oy'; décomposons les forces suivant les axes Ox', Oy', Oz et soient X', Y', Z' les composantes de la force consi-

dérée. Si ω est l'angle $x'Ox$, nous aurons, par des formules connues,

$$(1)\qquad \begin{cases} X' = \quad X\cos\omega + Y\sin\omega, \\ Y' = -X\sin\omega + Y\cos\omega. \end{cases}$$

Cela posé, les forces Z ont une résultante R égale à la résultante de translation et appliquée en un point C qui ne dépend, ni de l'orientation du solide, ni de la position des axes Ox', Oy'; les forces X' et Y' donnent deux couples dont les bras aa', bb' sont, pour une valeur donnée de ω, des droites fixes dans le solide, les forces qui les constituent étant, comme ces bras, indépendantes de l'orientation du corps. Cherchons si l'on peut choisir ω de façon que aa', bb' soient proportionnels à

$$\Sigma X'x, \quad \Sigma X'y, \quad \Sigma X'z$$

pour aa', et

$$\Sigma Y'x, \quad \Sigma Y'y, \quad \Sigma Y'z$$

pour bb'.

Ces droites seront donc rectangulaires si l'on a

$$(2)\qquad \Sigma X'x\,\Sigma Y'x + \Sigma X'y\,\Sigma Y'y + \Sigma X'z\,\Sigma Y'z = 0.$$

Posons

$$\Sigma Xx = l, \qquad \Sigma Xy = m, \qquad \Sigma Xz = n,$$
$$\Sigma Yx = l', \qquad \Sigma Yy = m', \qquad \Sigma Yz = n';$$

la condition (2) s'écrit

$$(3)\qquad \begin{cases} (\cos^2\omega - \sin^2\omega)(ll' + mm' + nn') \\ \quad + \sin\omega\cos\omega(l'^2 + m'^2 + n'^2 - l^2 - m^2 - n^2) = 0. \end{cases}$$

Cette équation (3), analogue à celle qui donne les directions des axes d'une conique, détermine en général un système rectangulaire $x'y'$ et un seul. C'est ce qui a

lieu si les quantités

$$ll' + mm' + nn', \qquad l^2 + m^2 + n^2 - l'^2 - m'^2 - n'^2$$

ne sont pas nulles en même temps, et c'est ce que nous supposerons pour le moment.

aa' et bb' étant ainsi déterminés, en appelant P la force du couple aa' qui est appliquée en a, Q celle du couple bb' qui est appliquée en b, nous pouvons supposer que les trois directions P, Q, R forment un trièdre trirectangle satisfaisant aux conventions ordinaires. Transportons les couples parallèlement à eux-mêmes, de façon que a' et b' viennent en C, point d'application de R; nous aurons un triangle rectangle ACB invariable dans le solide et qui le détermine complètement, et toutes les forces du système pourront être remplacées par R appliquée en C et les deux couples (CA, P) (CB, Q).

Au lieu de donner au corps des orientations diverses, nous pouvons supposer qu'il demeure fixe et que les forces tournent convenablement autour de leurs points d'application. Supposons les forces R, P, P', Q, Q' amenées dans une position telle que, P, Q, R étant demeurées rectangulaires, le système ait une résultante unique et cherchons la position de cette résultante dans le corps. Pour cela, prenons pour origine C, CA et CB pour axes des x et des y, et pour axe des z la perpendiculaire au plan ACB choisie de telle sorte que le trièdre Cxyz soit superposable au trièdre formé par les directions de P, Q et R.

Soient CA $= a$, CB $= b$; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs des trois directions P, Q, R; x, y, z les coordonnées d'un point de la résultante; X, Y, Z les composantes d'une force égale et directement opposée à cette résultante. Si nous écrivons que les six forces sont

en équilibre, nous aurons les équations

$$(4)\quad \begin{cases} X + R\alpha'' = 0, \\ Y + R\beta'' = 0, \\ Z + R\gamma'' = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} yZ - zY + bQ\gamma' = 0, \\ zX - xZ - aP\gamma = 0, \\ xY - yX + aP\beta - bQ\alpha' = 0. \end{cases}$$

La condition pour que la résultante existe est par suite

$$bQ(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') - aP(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') = 0,$$

ou, en tenant compte des relations connues entre les neuf cosinus,

$$(6)\qquad bQ\beta - aP\alpha' = 0.$$

Cette équation (6) étant satisfaite, les équations (5) se réduisent à deux qui sont les équations de la résultante, X, Y, Z étant remplacées par leurs valeurs tirées de (4). Soient ξ et ζ, η' et ζ' les coordonnées des points où la résultante rencontre respectivement les plans zx et zy. Nous aurons, pour les déterminer, les deux systèmes d'équations

$$(7)\quad \begin{cases} R\beta''\zeta + bQ\gamma' = 0, \\ R\beta''\xi - aP\beta + bQ\alpha' = 0; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} R\alpha''\zeta' + aP\gamma = 0, \\ R\alpha''\eta' + aP\beta - bQ\alpha' = 0. \end{cases}$$

Or, si nous considérons les deux groupes d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \end{cases}$$

nous en déduisons les deux suivantes :

(11) $$\alpha'^2 + \gamma'^2 = \beta^2 + \beta''^2,$$

(12) $$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha''^2.$$

Entre les quatre équations homogènes (6), (7) et (11) nous pouvons éliminer β, α', γ' et β''; de même entre (6), (8) et (12) nous pouvons éliminer β, α', γ et α''; il existe donc une relation entre ξ et ζ, de même que entre η' et ζ', c'est-à-dire que les points de rencontre de la résultante avec les plans zx et zy décrivent deux courbes déterminées. Les équations de ces courbes s'obtiennent immédiatement et sont les suivantes :

$$\frac{\zeta^2}{b^2 Q^2} - \frac{\xi^2}{a^2 P^2 - b^2 Q^2} = \frac{1}{R^2},$$

$$\frac{\zeta'^2}{a^2 P^2} + \frac{\eta'^2}{a^2 P^2 - b^2 Q^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Ce sont deux coniques ayant pour centre le point C, l'axe Cz pour axe focal ; l'une est une ellipse, l'autre une hyperbole, les sommets de l'une sont les foyers de l'autre et réciproquement. C'est le théorème de Minding.

Ceci suppose que $a^2 P^2 - b^2 Q^2$ n'est pas nul. Or la réduction des forces parallèles montre immédiatement que

$$a^2 P^2 = (\Sigma X x)^2 + (\Sigma X y)^2 + (\Sigma X z)^2,$$

$$b^2 Q^2 = (\Sigma Y x)^2 + (\Sigma Y y)^2 + (\Sigma Y z)^2,$$

et comme, par hypothèse,

$$\Sigma X x \, \Sigma Y x + \Sigma X y \, \Sigma Y y + \Sigma X z \, \Sigma Y z = 0,$$

on voit que, si l'on avait en même temps $a^2 P^2 = b^2 Q^2$, on serait dans le cas où l'équation (3) donne une infinité de systèmes de directions rectangulaires. Dans ce

cas, on voit que la résultante est assujettie à rencontrer seulement une droite, l'axe Cz.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1887 (1).

Composition de Mathématiques.

Parmi toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné, il y en a toujours deux qui passent par un point donné A. On demande :

1° De démontrer que, quel que soit le point A, les deux coniques en question sont toutes deux soit des ellipses, soit des hyperboles, soit des paraboles, ces courbes pouvant d'ailleurs appartenir aux variétés évanouissantes;

2° De déterminer les régions du plan pour lesquelles le point A détermine des ellipses ou des hyperboles, ou des courbes imaginaires;

3° De trouver le lieu du point A pour lequel les deux ellipses correspondantes ont la même aire, ou des aires qui sont dans un rapport donné.

Indiquer un moyen simple pour construire ce lieu.

Composition de Géométrie descriptive.

Un cube de $0^m,08$ de côté, ayant deux de ses trois directions d'arêtes respectivement perpendiculaires aux deux plans de projection, on considère comme indéfiniment prolongées : 1° l'arête verticale de gauche de la face du fond; 2° la diagonale de la même face qui part du point le plus haut de cette arête; 3° la diagonale parallèle à la précédente dans la face qui se trouve en avant.

La troisième droite, en tournant successivement autour des deux autres, engendrerait un hyperboloïde et un cylindre que

(1) Sujets donnés à quelques élèves qui n'ont pu composer que plus tard.

l'on suppose remplis. On suppose aussi remplie une sphère de $0^m,12$ de rayon ayant son centre au point de rencontre des deux premières droites. Représenter, par ses projections, le solide commun aux trois corps.

Nota. — On placera la projection horizontale du centre de la sphère à $0^m,13$ au-dessous de la projection verticale, à $0^m,09$ au-dessus du centre du cadre, sur la parallèle aux grands côtés menée par ce point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un seul point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

ÉCOLE FORESTIÈRE (CONCOURS DE 1887).

Mathématiques.

1. Si a et b sont deux nombres premiers entre eux : 1° des deux expressions $11a + 2b$ et $18a + 5b$, l'une étant divisible par 19, l'autre l'est également; 2° elles ne peuvent admettre d'autre facteur commun que 19.

2. Trouver, au moyen de l'identité de la division, trois équations qui permettent de déterminer les coefficients du reste de la division d'un polynôme entier par le produit

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

où α, β, γ sont trois quantités distinctes.

Résoudre et discuter ces équations, et en conclure les conditions nécessaires et suffisantes pour que la division se fasse exactement.

3. Une droite étant donnée par ses projections, trouver celles de sa projection sur le plan bissecteur du second dièdre formé par les plans horizontal et vertical. Prouver qu'elles restent les mêmes si la ligne de terre prend différentes positions parallèles entre elles, les données ne changeant pas d'ailleurs.

Trigonométrie et calcul logarithmique.

1. Calculer les côtés et les diagonales d'un parallélogramme dont on connaît le périmètre $2p$ et l'angle aigu α des diagonales, supposé égal à l'angle aigu de deux côtés adjacents.

2. On donne dans un triangle une médiane

$$m = 2741^{\mathrm{m}},633$$

et les angles suivant lesquels elle partage l'angle du triangle au sommet duquel elle passe

$$\alpha = 27^\circ 34' 15'',61, \qquad \beta = 39^\circ 52' 23'',87;$$

on demande les trois côtés et les trois angles.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1887).

1. Dans un plan, rapporté à deux axes rectangulaires, on considère le système des courbes définies par l'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C} = 0,$$

où A, B, C sont des constantes données, a, b des paramètres variables. Démontrer qu'à chaque point M du plan correspond un point M', tel que, par les deux points M, M', on puisse faire passer une infinité de cercles S. On montrera comment les coordonnées de l'un s'expriment au moyen des coordonnées de l'autre. On prouvera que la droite MM' passe par un point fixe I et que le produit IM.IM' est constant. Enfin, on cherchera à remplacer la définition analytique des cercles S par une définition géométrique qui mette en évidence les propriétés qui précèdent.

2. Les constantes A, B, C étant données, on propose de déterminer des constantes A_1, B_1, C_1, de façon que l'expression

$$\frac{\mathrm{A}}{x-a} + \frac{\mathrm{B}}{x-b} + \frac{\mathrm{C}}{x-c} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^2} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^2} + \frac{\mathrm{C}_1}{(x-c)^2}$$

soit le carré d'une fraction rationnelle en x. A quelle condition

est-ce possible? Les constantes A, B, C sont supposées différentes.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1887.

(SECONDE SESSION.)

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, un point A sur Ox, un point B sur Oy :

1° Écrire l'équation générale des paraboles qui passent par les trois points O, A, B. Montrer qu'en général il passe, par chaque point M du plan, deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M pour lesquels ces deux paraboles sont confondues et indiquer la région du plan qui contient les points où il n'en passe aucune réelle.

2° Trouver le lieu des points M tels que les axes des deux paraboles qui y passent forment entre eux un angle donné α. Construire le lieu pour le cas où $\alpha = 90°$.

3° Trouver le lieu du point de chacune de ces paraboles pour lequel la tangente est parallèle à OA, celui du point où la tangente est parallèle à OB, celui du point où la tangente est parallèle à AB. Ces lieux sont trois coniques. Construire ces coniques, vérifier que deux quelconques d'entre elles n'ont pas de point commun réel à distance finie, marquer leurs centres D, E, F et comparer le triangle DEF au triangle OAB.

4° On joint l'origine O au point F, centre de la conique lieu du point de contact des tangentes parallèles à AB, et, à cette droite OF, on élève au point O une perpendiculaire qui rencontre la droite AB en P. On demande le lieu du point P lorsque, le point A restant fixe, le point B parcourt l'axe des y.

Épure.

On donne un tétraèdre régulier ABCD dont la base ABC repose sur le plan horizontal de projection, en avant du plan vertical.

Le côté AB de cette base est parallèle à la ligne de terre; le

sommet C est en avant de AB par rapport à la ligne de terre. Le sommet D du tétraèdre est situé au-dessus de la base de ce tétraèdre.

L'arête du tétraèdre a une longueur de $0^m,150$; le côté AB de la base est à $0^m,030$ de la ligne de terre.

On considère les deux cônes suivants :

1° Un cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD;

2° Un cône ayant pour sommet le point B et pour base le cercle inscrit dans le triangle ACD.

Cela posé, on demande de déterminer les projections de l'intersection de ces deux cônes.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est opaque et que l'on enlève toute la partie de ce corps intérieure au premier cône et aussi toute celle intérieure au deuxième cône. On indiquera les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection, sa tangente et les points remarquables de cette intersection. Ces constructions seront succinctement expliquées dans une légende placée au bas de la feuille de dessin.

Titre extérieur : Géométrie descriptive.

Titre intérieur : Intersection de surfaces.

Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre, à égales distances de ces deux côtés.

Trigonométrie.

On donne deux côtés d'un triangle et l'angle compris

$$a = 2476^m,345,$$
$$b = 1583^m,654,$$
$$C = 108^\circ 53' 54'',43.$$

Calculer les deux autres angles, le troisième côté et le rayon du cercle circonscrit.

Physique.

On donne 1^{mc} d'air humide à la pression totale $0^m,764$, à la température 15°, à l'état hygrométrique $\frac{3}{4}$. On porte cet air à 50°, on maintient la pression totale constante égale à $0^m,764$, on fournit à la masse d'air assez d'eau pour maintenir constant à 50° l'état hygrométrique égal à $\frac{3}{4}$.

On demande :

1° Le nouveau volume de l'air;

2° Le poids d'eau qu'il aura été nécessaire de fournir.

On sait que la force élastique maximum de la vapeur d'eau est, à 15°, $F_{15} = 0^{m},0127$; à 50°, $F_{50} = 0^{m},092$.

$\alpha = 0,00367$, coefficient de dilatation de l'air;

a le poids du litre d'air sec à 0° et $760^{mm} = 1^{gr},293$;

δ la densité de la vapeur d'eau $= 0,622$.

Chimie.

I. Analyse de l'air. Décrire :

1° L'expérience de Lavoisier;

2° Le procédé de Dumas et Boussingault.

II. Quelles sont les deux méthodes de calcul qui permettent de connaître le poids de 1^{lit} de gaz ammoniac, en faisant usage de nombres choisis parmi les suivants :

Équivalents en poids $\begin{cases} H = 1, \\ Az = 14. \end{cases}$ Équivalents en volume $\begin{cases} H = 2, \\ Az = 2, \\ Az H^3 = 4. \end{cases}$

Densités $\begin{cases} H = 0,0692, \\ Az = 0,9714. \end{cases}$

Poids du litre d'air .... $1^{gr},293$.

CONCOURS POUR L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1887 (1).

Mathématiques spéciales.

L'énoncé de la p. 434 (*loc. cit.*) est incomplet; entre 1° et 2°, il faut intercaler :

La conique S étant une ellipse donnée et Σ un cercle donné, trouver l'équation de S'.

(1) *Voir* 3e série, t. VI, p. 433.

Calcul numérique.

En deux points A et B, situés sur une même horizontale à 2^m l'un de l'autre, sont fixées les deux extrémités d'un fil pesant, homogène, flexible et inextensible de 3^m de longueur. Calculer, avec l'approximation que comportent les tables à 7 décimales, les angles que font avec l'horizontale les tangentes en A et B à la courbe formée par le fil.

Épure.

On donne deux points A et B, et l'on mène l'horizontale CD perpendiculaire à la droite AB en son milieu C.

On prend sur cette droite un point D, tel que le triangle DAB soit équilatéral.

Cela posé, on considère deux cylindres de révolution dont l'un a pour axe AD et passe par le point B, et dont l'autre ayant pour axe BD passe par le point A.

Représenter le solide commun à ces deux cylindres.

Dans ce qui suit, α et β désignent les projections sur la ligne de terre des points A et B.

Le point α est au milieu de la feuille, le point β à droite de α à 42^{mm},

$$\alpha a' = 65^{mm}, \qquad \alpha a = 39^{mm}, \qquad \beta b' = 96^{mm}, \qquad \beta b = 80^{mm}.$$

La droite CD prolongée du côté du point D ne rencontre pas le plan vertical.

On joindra à l'épure une légende explicative de la méthode employée.

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. ERNEST CESARO,
Professeur à l'Université de Palerme.

Dans toute série convergente, le produit d'un terme par son rang ne peut tendre vers une limite différente de zéro.

Ce théorème est ordinairement démontré pour les séries à termes positifs, et la démonstration est fondée sur la divergence de la série harmonique. Il est vrai que, si nu_n tend vers $\lambda \gtrless 0$, u_n finit par prendre le signe de λ, et, par suite, on pourrait se borner à considérer les séries à termes positifs. Mais nous préférons exposer ici une démonstration indépendante de toute série spéciale et de toute hypothèse sur les signes des termes. Rappelons d'abord que si, pour n infini, a_n tend vers une limite, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = \lim a_n.$$

Il en résulte que l'on peut écrire

$$\lim \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n) = \lambda.$$

D'autre part, la somme $u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n$ peut s'écrire ainsi

$$S_1 + 2(S_2 - S_1) + \ldots + n(S_n - S_{n-1})$$
$$= (n+1)S_n - (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n).$$

Conséquemment

$$\lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) S_n - \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\right] = \lambda.$$

Si la série est convergente, on a, en vertu de (1),

$$\lim \frac{1}{n}(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n) = \lim S_n.$$

Donc $\lambda = 0$.

Rappelons que la condition $\lim nu_n = 0$ n'est pas *suffisante* pour la convergence, car il y a des séries divergentes qui y satisfont. Elle n'est pas *nécessaire*, car nu_n pourrait osciller au lieu de tendre vers zéro. Cependant elle devient nécessaire pour les séries dans lesquelles le

rapport de deux termes consécutifs tend vers une limite déterminée; car, si nu_n oscillait, il en serait de même de $\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n}$, et, partant, de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Remarquons enfin que la condition $\lim nu_n = \lambda$, où $\lambda \gtrless 0$, est *suffisante pour la divergence.*

Le caractère de divergence que nous venons d'obtenir a plus d'importance qu'on ne lui en donne dans les *Traités;* car, toutes les fois qu'il permet de constater la divergence d'une série, on peut être assuré que *la règle de Duhamel ne saurait en faire autant.* Supposons, en effet, λ fini et différent de zéro. On a

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n}{n+1} \frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = 1.$$

C'est le cas de recourir au théorème de Duhamel. Soit

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \lim \frac{(n+1)u_{n+1} - nu_n}{u_{n+1}} = 1 - \mu.$$

Considérons la série

$$v_1 = u_1, \qquad v_2 = 2u_2 - u_1, \qquad v_3 = 3u_3 - 2u_2, \qquad \ldots,$$

évidemment convergente, puisque

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = nu_n.$$

L'égalité (2) devient

$$\lim \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = 1 - \mu,$$

d'où

$$\lim nv_n = (1 - \mu)\lambda.$$

Mais le premier membre est nul. Donc $(1-\mu)\lambda = 0$; puis $\mu = 1$. La règle de Duhamel ne conduit à rien.

On parvient au même résultat, dans le cas de séries à termes positifs, en partant de la relation

$$(3)\qquad \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \lim a_n,$$

qu'on déduit aisément de (1) par le changement de a_n en $\log a_n$. Pour $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, on obtient

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{1.2.3\ldots n}} = e.$$

De même, pour $a_n = nu_n$, on trouve, en tenant compte du dernier résultat,

$$\lim n \sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} = \lambda e.$$

D'autre part, si l'on fait

$$x_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

dans la relation connue

$$\lim \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{\lim x_n},$$

on obtient

$$\lim \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n = e^\mu;$$

puis, pour

$$a_n = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^n,$$

la relation (3) devient

$$\lim \frac{\sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}}{u_n} = e^\mu,$$

d'où

$$\lim n \sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n} = \lambda e^\mu.$$

Donc $\mu = 1$.

Inversement, il est facile de se convaincre que nu_n

tend vers zéro toutes les fois que les règles précédentes permettent de reconnaître qu'une série est convergente. En nous bornant aux séries à termes positifs, soit d'abord

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = \lambda < 1,$$

et prenons $\lambda < q < 1$. Il doit exister un nombre fini ν, tel que, pour $n \geqq \nu$, on ait toujours

$$\frac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} < q,$$

puis

$$\frac{nu_n}{\nu u_\nu} < q^{n-\nu}.$$

Donc, pour n croissant à l'infini, $\lim nu_n = 0$. En second lieu, soit $\lambda = 1$; mais

$$\lim n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \mu > 1,$$

et prenons $1 < q < \mu$. On pourra déterminer ν de manière que, pour $n \geqq \nu$, on ait toujours

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n},$$

puis

$$\frac{nu_n}{\nu u_\nu} < \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots n}{(\nu+q)(\nu+q+1)\ldots(n+q-1)}.$$

On sait, d'ailleurs, que le second membre de cette inégalité est le produit de

$$\frac{(1+q)(2+q)\ldots(\nu+q-1)}{2.3.4\ldots\nu}\,\frac{\Gamma(1+q)}{n^{q-1}}$$

par une fonction de n, qui tend vers l'unité pour n in-

fini. Donc, encore une fois, à cause de $q > 1$, on a $\lim nu_n = 0$.

Le théorème exprimé par l'égalité (1) est susceptible d'une utile généralisation. Soit $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ une série divergente, à termes positifs. Si a_n tend vers une limite a, il existe un nombre ν, tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$| a_n - a | < \varepsilon,$$

ε étant donné à l'avance arbitrairement petit. On en déduit

$$| a_n v_n - a v_n | < \varepsilon v_n.$$

Maintenant, si l'on pose

$$\sigma_n = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n - a(v_1 + v_2 + \ldots + v_n),$$

on obtient par addition

$$| \sigma_n - \sigma_\nu | < \varepsilon(v_{\nu+1} + v_{\nu+2} + \ldots + v_n),$$

puis

$$\left| \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n - \sigma_\nu}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n} - a \right| < \varepsilon \left(1 - \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_\nu}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} \right).$$

Conséquemment, si l'on fixe ν en faisant augmenter n à l'infini, on trouve

$$\lim \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n} = a.$$

Il suffit de faire $v_n = 1$ pour retrouver (1). Cela étant, supposons que

$$a_n = \frac{u_n}{v_n}$$

tende vers une limite. On trouve

$$\lim \frac{S_n}{v_1 + v_2 + \ldots + v_n} = \lim \frac{u_n}{v_n}.$$

Pour $v_n = \frac{1}{n}$, nous voyons que

$$\lim \frac{S_n}{\log n} = \lim n u_n,$$

pourvu que le second membre existe. Il en résulte que *les séries divergentes, pour lesquelles nu_n tend vers zéro, sont moins divergentes que la série harmonique*. De même, pour $v_n = 1$, on trouve

$$\lim \frac{S_n}{n} = \lim u_n.$$

Par suite, *les séries divergentes, dont le terme général tend vers zéro, sont moins divergentes que la série* $1 + 1 + 1 + \ldots$. Ici il convient de faire remarquer qu'on peut rigoureusement comparer la divergence de deux séries en étudiant le rapport des sommes des n premiers termes, pour n infini. Lorsque ce rapport a une limite finie et déterminée, autre que zéro, les deux séries sont également divergentes. On dit que la première série est moins divergente que la seconde lorsque le rapport en question tend vers zéro.

Partageons le système des nombres entiers en un nombre fini de systèmes $A_1, A_2, \ldots, A_r$, et supposons que a_n tende vers λ_i lorsque n parcourt A_i. Soient respectivement n_i et σ_i le nombre et la somme des entiers, non supérieurs à n, qui appartiennent au système A_i. Soit, en outre, ϖ_i la probabilité qu'un entier, pris au hasard, appartienne à A_i. On a, pour n infini,

$$\lim \frac{n_i}{n} = \varpi_i, \qquad \lim \frac{\sigma_i}{n_i} = \lambda_i.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{n_1}{n}\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{n_2}{n}\frac{\sigma_2}{n_2} + \ldots + \frac{n_r}{n}\frac{\sigma_r}{n_r}.$$

Donc

$$(4)\quad \lim \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \ldots + \lambda_r\varpi_r.$$

On démontrerait de même que

$$(5)\qquad \lim \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \lambda_1^{\varpi_1}\lambda_2^{\varpi_2}\lambda_3^{\varpi_3}\ldots\lambda_r^{\varpi_r}.$$

Reprenons (4) et faisons-y $a_n = nu_n$. On trouve que *l'on doit avoir*

$$(6)\qquad \lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \lambda_3\varpi_3 + \ldots + \lambda_r\varpi_r = 0,$$

pour que la série soit convergente. C'est là un nouveau caractère, qui permet de constater immédiatement la divergence de certaines séries. Ainsi, par exemple, on voit au premier coup d'œil que la série

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots$$

est divergente, car on a $\lambda_1 = -1$, $\varpi_1 = \frac{1}{3}$, lorsque n est divisible par 3; et $\lambda_2 = 1$, $\varpi_2 = \frac{2}{3}$, lorsque n est premier avec 3.

Nous pouvons même énoncer des propositions générales, qui offrent un certain intérêt. Considérons, par exemple, un système A, constitué par une suite a_1, a_2, a_3, ... de nombres entiers, croissant à l'infini. Soit ϖ la probabilité qu'un nombre entier, pris au hasard, appartienne au système A. La condition (6), appliquée à la série

$$(7)\qquad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \ldots,$$

donne $\varpi = 0$, en supposant $u_n = \frac{1}{n}$ ou bien $u_n = 0$, suivant que n appartient ou non au système A. Conséquemment, *pour que la série* (7) *soit convergente, il*

est nécessaire que les dénominateurs soient infiniment rares parmi les nombres entiers. Cette condition n'est pas suffisante. Ainsi la série (7) est convergente lorsque A est le système des *carrés parfaits* : elle est divergente lorsque A est le système des *nombres premiers.* Les fréquences de ces deux systèmes sont infinitésimales : leurs inverses deviennent infinies comme les fonctions $\sqrt{n}$, $\log n$, respectivement. Le dernier théorème est, du reste, une conséquence immédiate d'un théorème de Dirichlet, d'après lequel la limite de

$$\varepsilon\left(\frac{1}{a_1^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{a_2^{1+\varepsilon}}+\frac{1}{a_3^{1+\varepsilon}}+\ldots\right),$$

pour $\varepsilon = 0$, est égale à ϖ. Or, lorsque la série (7) est convergente, la limite en question est 0. Donc $\varpi = 0$.

Changeons les signes de certains termes, arbitrairement choisis, dans la série harmonique, et soit ϖ la probabilité de rencontrer un terme négatif dans la série obtenue

$$(8) \qquad \pm 1 \pm \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{4} \pm \ldots.$$

Les indices des termes négatifs constituent un premier système pour lequel on a $\lambda_1 = -1$, $\varpi_1 = \varpi$. Les indices des termes positifs constituent un second système, pour lequel $\lambda_2 = 1$, $\varpi_2 = 1 - \varpi$. La condition (6) devient

$$1 - 2\varpi = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi = \tfrac{1}{2}.$$

Conséquemment, *pour que la série* (8) *soit convergente, il faut que les termes négatifs y soient tout aussi fréquents que les termes positifs.*

Faisons une inversion de termes dans la série

$$(9) \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \ldots$$

en conservant l'ordre des termes de même signe. Sup-

posons que l'on ait, après l'inversion, n_1 termes positifs, suivis de n_2 termes négatifs, etc. Soit

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_{2r},$$

et désignons par ϖ la probabilité de rencontrer un terme négatif, de sorte que

$$\varpi = \lim \frac{n_2 + n_4 + \ldots + n_{2r}}{n},$$

$$1 - \varpi = \lim \frac{n_1 + n_3 + \ldots + n_{2r-1}}{n}.$$

Tant que ϖ est différent de zéro et de 1, la série considérée *peut être* convergente. Remarquons, en effet, que nu_n tend vers $-\frac{1}{2\varpi}$, ou bien vers $\frac{1}{2(1-\varpi)}$, suivant que u_n est négatif ou positif. La condition (6) est donc vérifiée. Pour montrer que la série *est* convergente, remarquons que la somme de ses n premiers termes est

$$S_n = H_{2(n_1+n_3+\ldots+n_{2r-1})} - \frac{1}{2} H_{n_1+n_3+\ldots+n_{2r-1}} - \frac{1}{2} H_{n_2+n_4+\ldots+n_{2r}},$$

où H_n représente la somme des n premiers termes de la série harmonique. On sait, d'ailleurs, que cette dernière somme est asymptotique à $\log n + C$, d'où il suit que S_n est asymptotique à

$$\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{n_1 + n_3 + n_5 + \ldots + n_{2r-1}}{n_2 + n_4 + n_6 + \ldots + n_{2r}}.$$

Conséquemment, *la somme de la série considérée est égale au logarithme naturel de*

$$2\sqrt{\frac{1}{\varpi} - 1}.$$

En particulier, si l'on veut altérer l'ordre des termes dans (9), de manière à obtenir une somme *nulle*, on

doit prendre

$$2\sqrt{\frac{1}{\varpi}-1}=1, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi=\tfrac{4}{5}.$$

Par exemple,

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{14}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{5}-\ldots=0.$$

Si, au contraire, on veut que la série conserve la somme qu'elle a, *il faut laisser les termes négatifs se succéder aussi fréquemment que les positifs.*

Il est remarquable que le caractère de convergence exprimé par la relation (6) soit encore applicable à des séries, pour lesquelles viennent à manquer d'autres caractères importants. Il est d'abord évident que le rapport de deux termes consécutifs oscille, car on a

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\lambda_i}{\lambda_j},$$

lorsque n parcourt A_j, en prenant seulement les valeurs qui sont suivies, dans le système total, de nombres appartenant au système A_i. Soit ϖ_{ij} la fréquence de ces valeurs, de sorte que

$$\varpi_i=\varpi_{i1}+\varpi_{i2}+\ldots+\varpi_{ir}=\varpi_{1i}+\varpi_{2i}+\ldots+\varpi_{ri}.$$

La formule (5) permet d'écrire

$$\lim \sqrt[n]{u_n}=\prod_{i,j}^{r}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\varpi_{ij}}=1.$$

L'examen de cette limite ne permet donc pas de constater la divergence de la série. Il resterait à chercher les conditions moyennant lesquelles on serait autorisé à étendre les formules (4) et (5) au cas de r infini. Nous nous en occuperons peut-être.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

Par M. H. LAURENT.

Je me propose de faire connaître, dans ce travail, une nouvelle méthode d'élimination applicable à un nombre quelconque d'équations algébriques.

Considérons d'abord deux équations algébriques

$$(1) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

des degrés respectifs m et n. Pour résoudre ces deux équations, on peut commencer par éliminer x; à cet effet on peut, comme je l'ai montré dans un des derniers numéros de ce Journal, former les équations

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-1} = 0,$$

où φ_1 désigne le reste de la division de φ par ψ, φ_2 le reste de la division de $x\varphi_1$ par ψ, ... Ces équations (2) fournissent, par l'élimination de $x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, la résultante cherchée que j'appellerai

$$(3) \qquad \mathrm{R} = 0.$$

Supposons cette équation résolue; si, dans les équations (2), on remplace y par une des racines de (3), ces équations feront connaître la valeur de x, ou plutôt les valeurs de $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, qu'il faut associer à la valeur considérée de y pour avoir une solution des équations (1).

Je ne discuterai pas les équations (2); je ferai seulement observer que, si l'équation (3) n'a pas de solutions multiples, ce que nous supposerons, les valeurs de x, qu'il faut associer à chacune des racines de (3) pour

former une solution de (1), sont des fonctions rationnelles de y. En effet, les équations (2) sont du premier degré en x^0, x, x^2, ..., x^{n-1}, et leur déterminant R est nul sans que tous ses mineurs le soient; car, si tous les mineurs de R étaient nuls, en appelant M l'un d'eux, on aurait

$$\frac{dR}{dy} = \Sigma M \frac{dM}{dy},$$

et $\frac{dR}{dy}$ serait nul, $R = 0$ aurait une racine multiple.

Toute valeur de x, qui, associée à une racine y de $R = 0$, fournit une solution de (1), est donc une fonction rationnelle des coefficients de (2), c'est-à-dire de y racine de $R = 0$; on en conclut que :

Toute fonction rationnelle d'une solution de (1) *s'exprime rationnellement en fonction d'une racine y de* $R = 0$.

Mais toute fonction rationnelle de y s'exprime sous la forme d'un polynôme entier de degré $mn - 1$ en y, car mn est le degré de R en y; donc :

Toute fonction rationnelle d'une solution de (1) *peut se mettre sous la forme d'un polynôme entier de degré $mn - 1$ en y racine de* $R = 0$.

Cela posé, supposons que l'on veuille éliminer x et y entre les équations

$$(4) \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

φ et ψ ayant la même signification que tout à l'heure et χ désignant un polynôme de degré p en x et y. Supposons d'abord que l'équation (3) n'ait pas de solution multiple; on pourra exprimer $\chi(x, y)$ sous la forme d'un polynôme entier en y de degré $mn - 1$, et cela

bien facilement, puisque x peut être calculé en fonction de y au moyen des équations (2); on exprimera de même $y\chi$, $y^2\chi$, $\ldots$, $y^{mn-1}\chi$, ce qui pourra d'ailleurs se faire en divisant ces quantités par R et en les remplaçant par leurs restes dès que χ aura été lui-même exprimé en y. Soit alors, en faisant $\varpi = mn$,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \chi &= c_{00} + c_{01}y + \ldots + c_{0,\varpi-1}y^{\varpi-1},\\ y\chi &= c_{10} + c_{11}y + \ldots + c_{1,\varpi-1}y^{\varpi-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y^{\varpi-1}\chi &= c_{\varpi-1,0} + \ldots + c_{\varpi-1,\varpi-1}y^{\varpi-1}.\end{aligned}\right.$$

Je dis que le déterminant $\Sigma \pm c_{00}c_{11}\ldots c_{\varpi-1,\varpi-1} = S$ sera le premier membre de la résultante des équations (4). En effet, appelons (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_ϖ, y_ϖ) les solutions des équations (1) et désignons en général par F_i ce que devient la fonction $F(x, y)$ quand on y remplace x et y par x_i et y_i; les équations (5) ont lieu quand on y remplace x et y par x_1 et y_1, x_2 et y_2, ... Elles montrent alors que le déterminant

$$(6)\quad \begin{vmatrix} \chi_1 & y_1\chi_1 & \cdots & y_1^{\varpi-1}\chi_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \chi_\varpi & y_\varpi\chi_\varpi & \cdots & y_\varpi^{\varpi-1}\chi_\varpi \end{vmatrix}$$

est égal au produit de S par

$$(7)\quad \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{\varpi-1}\\ 1 & y_2 & \cdots & y_2^{\varpi-1}\\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & y_\varpi & \cdots & y_\varpi^{\varpi-1} \end{vmatrix},$$

produit des différences des racines de $R = 0$, toutes distinctes par hypothèse. Mais, à l'inspection de ce déterminant (6), on voit qu'il est le produit du détermi-

nant (7) par $\chi_1\chi_2\ldots\chi_\varpi$; on a donc

$$S = \chi_1\chi_2\ldots\chi_\varpi.$$

$S = 0$ est donc bien la résultante des équations (4).

Maintenant, supposons que l'équation (3) ait une solution multiple; la solution que nous allons exposer a cela de remarquable qu'elle fournira la résultante, quelle que soit la définition que l'on conviendra d'en donner. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (3)

$$R = 0$$

n'ait qu'une racine multiple et que cette racine soit double; soit $y_\varpi = y_{\varpi-1}$ cette racine: on pourra en débarrasser $R = 0$. Soit $R' = 0$ l'équation qui a pour racines $y_1, y_2, \ldots, y_{\varpi-2}$; les valeurs de x_1, x_2, $\ldots$ $x_{\varpi-2}$ seront rationnelles en $y_1, y_2, \ldots y_{\varpi-2}$ respectivement. Toute fonction rationnelle de x_i et y_i où $i < \varpi - 1$ pourra se mettre sous la forme d'un polynôme entier de degré $\varpi - 3$ en y_i; si l'on pose alors

$$\chi_i = a_{00} + a_{01}y_i + \ldots + a_{0,\varpi-3}y^{\varpi-3},$$
$$y_i\chi_i = a_{10} + a_{11}y_i + \ldots + a_{1,\varpi-3}y^{\varpi-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on prouvera, en suivant une méthode analogue à celle dont on vient de faire usage, que, si l'on désigne par T le déterminant $\Sigma \pm a_{00}a_{11}\ldots a_{\varpi-3,\varpi-3}$, on aura

$$T = \chi(x_1, y_1)\chi(x_2, y_2)\ldots\chi(x_{\varpi-2}, y_{\varpi-2});$$

donc

$$T\chi(x_{\varpi-1}, y_{\varpi-1})\chi(x_\varpi, y_\varpi) = 0$$

sera la résultante des équations (4). Si $x_{\varpi-1} = x_\varpi$, la résultante, suivant les conventions que l'on voudra faire, sera

$$T\chi^2(x_\varpi, y_\varpi) = 0 \quad \text{ou} \quad T\chi(x_\varpi, y_\varpi) = 0.$$

car l'une et l'autre équation expriment que les équations (4) ont une solution commune.

$x_{\varpi-1}$ et x_ϖ sont racines d'une équation du second degré; mais il est clair que

$$\chi(x_{\varpi-1}, y_\varpi)\chi(x_\varpi, y_\varpi)$$

ne renfermera pas d'irrationnalités. On voit sans peine comment il faudrait procéder si $R = 0$ avait plusieurs racines multiples d'ordre égal ou supérieur au second.

On voit aussi comment la méthode précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations algébriques; en particulier, s'il s'agit d'éliminer x, y, z entre les quatre équations

$$(8)\quad \varphi(x,y,z) = 0,\ \psi(x,y,z) = 0,\ \chi(x,y,z) = 0,\ \theta(x,y,z) = 0$$

des degrés respectifs m, n, p, q, on formera la résultante

$$S = 0,$$

provenant de l'élimination de x et y entre les trois premières. Appelant (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... les solutions communes à ces équations, on formera

$$\theta(x_i, y_i, z_i),\quad z_i\theta(x_i, y_i, z_i),\quad \ldots,$$

que l'on exprimera sous forme de polynômes entiers de degré $mnp - 1$ en z. Le déterminant des coefficients de ces polynômes égalé à zéro fournira la résultante.

La méthode que nous venons d'exposer a cet avantage sur toutes celles qu'on a données jusqu'ici, qu'elle conduit à des calculs que l'on peut à la rigueur effectuer, et qu'elle fournit une résultante dont on a la signification précise.

C'est la théorie des équivalences algébriques qui m'a conduit à la méthode que je viens d'exposer; c'est en s'appuyant sur cette théorie qu'il conviendrait de la

présenter; elle gagnerait ainsi en élégance, en simplicité et surtout en généralité, mais elle risquerait de rebuter les élèves de Mathématiques spéciales pour qui ces lignes sont écrites.

Je ne veux pas abandonner ce sujet avant d'avoir montré comment on peut profiter des théories précédentes pour calculer les fonctions symétriques des solutions de plusieurs équations algébriques. Considérons les trois équations

$$(9)\qquad \varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0, \qquad \chi(x, y, z) = 0$$

et soient

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad \ldots, \quad (x_\varpi, y_\varpi, z_\varpi)$$

leurs solutions communes. Le calcul d'une fonction symétrique revient au calcul d'expressions de la forme

$$\Sigma\theta(x_i, y_i, z_i).$$

Supposons donc qu'il s'agisse de calculer l'expression

$$\Sigma\theta(x_i, y_i, z_i),$$

θ désignant une fonction entière de x_i, y_i, z_i; posons

$$(10)\qquad t - \theta(x, y, z) = 0.$$

Éliminons x, y, z entre les équations (9) et (10) en suivant la méthode donnée plus haut; le résultant en t se présentera sous forme de déterminant et la fonction symétrique $\Sigma\theta$ sera au signe près le coefficient de $t^{\varpi-1}$ dans le développement de ce déterminant.

SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX POLYNOMES ENTIERS;

Par M. E. POMEY.

Je me propose, dans cette Note, de chercher, à l'égard de deux polynômes entiers,

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m,$$
$$g = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

1° les conditions nécessaires et suffisantes pour que f et g aient comme plus grand commun diviseur un polynôme de degré p; 2° l'expression explicite de ce polynôme; 3° les quotients respectifs de f et g, divisés par ce polynôme.

L'étude de ces questions peut être rattachée, soit au résultant d'Euler, soit à celui de Bezout-Cauchy : nous diviserons cette Note en deux parties se rapportant respectivement à ces deux points de vue. Nous aurons d'ailleurs recours, dans l'une et dans l'autre partie, à un théorème fondamental bien connu, mais dont nous rappellerons la démonstration.

Théorème fondamental. — *Lorsqu'il existe deux polynômes entiers u et v, respectivement de degrés $n-p$ et $m-p$, satisfaisant à l'identité*

$$uf + vg \equiv 0, \tag{1}$$

f et g ont un diviseur commun de degré au moins égal à p.

En effet, désignons par d le plus grand commun diviseur de u et v, ce polynôme d pouvant se réduire à

une constante, et par u_1 et v_1 les quotients de u et v divisés par d. L'identité (1) peut s'écrire alors

$$d(u_1 f + v_1 g) = 0,$$

ou, puisque d n'est pas identiquement nul,

$$(2) \qquad u_1 f + v_1 g = 0.$$

D'après cette identité, u_1 divise $v_1 g$; mais u_1 est premier avec v_1, d'après un théorème connu ; donc il divise g, et l'on a

$$(3) \qquad g = u_1 \mathrm{P},$$

P désignant un polynôme entier. Il en résulte, par l'identité (2),

$$(4) \qquad f = - v_1 \mathrm{P}.$$

Or, f et g sont respectivement de degrés m et n; u_1 et v_1 sont au plus des degrés $n-p$ et $m-p$. Donc, d'après (3) et (4), f et g ont un diviseur commun P de degré au moins égal à p.

Première Partie.

Définitions. — Désignons par R_0 le déterminant d'ordre $m+n$ formé par les coefficients de x^0, x^1, x^2, ..., x^{m+n-1} dans les polynômes suivants :

$$\begin{array}{lllll} x^{n-1}f, & x^{n-2}f, & \ldots, & x^1 f, & x_0 f, \\ x^0 g, & x^1 g, & \ldots, & x^{m-2} g, & x^{m-1} g. \end{array}$$

On a ainsi, en supposant des zéros à toutes les places laissées vides en dehors des deux parallélogrammes re-

couverts par les coefficients a et b,

$$R_0 = \begin{vmatrix}
 & & & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_m \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_m & & \\
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_m & & & \\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & & & & \\
 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & & & \\
 & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
 & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n
\end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n \text{ lignes.} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m \text{ lignes.} \end{matrix}$$

R_0 est le déterminant d'Euler, dans lequel on a seulement renversé l'ordre des n premières lignes.

Nous supposons $m \geq n$.

Soit p un nombre entier inférieur ou au plus égal à n. Supprimons dans R_0 les p premières et les p dernières lignes : alors les p dernières colonnes ne contiennent plus que des zéros ; en les supprimant également, il reste un tableau rectangulaire que je désigne par T_p.

Si l'on supprime les p premières colonnes de ce tableau T_p, il reste un tableau carré, dont j'appelle R_p le déterminant des éléments. On voit en somme que R_p se déduit de R_0 en y supprimant les p premières et les p dernières lignes, ainsi que les p premières et les p dernières colonnes.

Soit i l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots, p$. J'appelle $R_{p,i}$ le déterminant déduit de R_p en y remplaçant la première colonne par la colonne qui, dans le tableau T_p, occupe le rang i.

Je désigne par D_p le déterminant obtenu au moyen de R_p, en ajoutant à sa première colonne multipliée par x^p les p premières colonnes du tableau T_p, respectivement multipliées par $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$.

J'appelle enfin U_{n-p-1} et V_{m-p-1} les deux détermi-

nants obtenus en remplaçant successivement la première colonne de R_p par celles-ci

$$\begin{array}{rcc}
 & x^{n-p-1} & 0 \\
 & . & . \\
 & x^{1} & 0 \\
 & x^{0} & 0 \\
 & 0 & x^{0} \\
 & 0 & x^{1} \\
m-p \text{ zéros} & . & . \\
 & 0 & x^{m-p-1}.
\end{array}
\quad \text{(les } n-p \text{ premiers éléments de la seconde colonne : } n-p \text{ zéros.)}$$

Ces définitions étant posées, nous allons établir plusieurs lemmes importants.

Lemme I. — *L'expression développée du polynôme* D_p *est*

$$D_p \equiv R_{p,1} x^0 + R_{p,2} x^1 + \ldots + R_{p,p} x^{p-1} + R_p x^p.$$

En effet, d'après sa définition, D_p est la somme de $p+1$ déterminants qui se déduisent de R_p en y remplaçant successivement la première colonne par les $p+1$ premières colonnes de T_p, respectivement multipliées par x^0, x^1, x^2, ..., x^p. Or ces déterminants sont précisément ceux qu'on a désignés plus haut par $R_{p,i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, p)$ et R_p, et qu'on a multipliés respectivement par x^0, x^1, x^2, ..., x^p, ce qui démontre le lemme.

Lemme II. — *On a identiquement*

$$D_p \equiv U_{n-p-1} f + V_{m-p-1} g.$$

En effet, D_p ne change pas si l'on ajoute à sa première colonne les suivantes respectivement multipliées par x^{p+1}, x^{p+2}, ..., x^{m+n-1}. Les éléments de sa pre-

mière colonne deviennent ainsi

$$x^{n-p-1}f, \quad \ldots, \quad x^1 f, \quad x^0 f, \quad x^0 g, \quad x^1 g, \quad \ldots, \quad x^{m-p-1} g.$$

Cette colonne peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{array}{c} x^{n-p-1}f + 0 \cdot g, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x^1 f + 0 \cdot g, \\ x^0 f + 0 \cdot g, \\ 0 \cdot f + x^0 g, \\ 0 \cdot f + x^1 g, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 \cdot f + x^{m-p-1} g. \end{array}$$

On voit alors que D_p est la somme des deux déterminants obtenus en remplaçant la première colonne de R_p successivement par les premiers, puis par les seconds termes des éléments binômes qu'on vient d'écrire. Ces déterminants contiennent en facteur, l'un f, l'autre g, et l'on voit que les multiplicateurs de f et g sont les déterminants désignés par la notation U_{n-p-1}, V_{m-p-1}, ce qui démontre l'identité annoncée.

Lemme III. — *Lorsque p est inférieur à n, les polynômes U_{n-p-1}, V_{m-p-1}, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, ont respectivement pour premiers termes $b_n R_{p+1} x^{n-p-1}$, $-a_m R_{p+1} x^{m-p-1}$. Lorsque p est égal à n, le premier de ces polynômes est identiquement nul, le second se réduit à $(b_n)^{m-n-1}$, en sorte qu'on a $U_{-1} \equiv 0$ et $V_{m-n-1} = (b_n)^{m-n-1}$.*

En effet, supposons d'abord $p < n$. En développant U_{n-p-1} par rapport aux éléments de sa première colonne, on obtient un polynôme entier en x, ordonné par rapport aux puissances décroissantes, dont le premier terme est de degré $n-p-1$. Le coefficient de

ce terme est le déterminant qu'on déduit de R_p par la suppression de sa première ligne et de sa première colonne. Or la dernière colonne de R_p a évidemment pour premier élément a_m; les éléments suivants sont des zéros, sauf le dernier qui est b_n. Par conséquent, en supprimant la première ligne de R_p, l'élément a_m, qui figurait en tête de la dernière colonne, se trouve supprimé, et la dernière colonne du déterminant obtenu par la suppression de la première ligne et de la première colonne de R_p, se compose d'éléments nuls, sauf le dernier qui est b_n; d'ailleurs, si l'on supprimait encore cette colonne, ainsi que la dernière ligne, le déterminant restant serait R_{p+1}. Le coefficient de x^{n-p-1} est donc un déterminant qui, développé par rapport aux éléments de la dernière colonne, se réduit à $b_n R_{p+1}$.

De même, en développant V_{m-p-1} par rapport aux éléments de sa première colonne, on obtient un polynôme entier en x, de degré $m-p-1$; dans ce développement, c'est le terme relatif au dernier élément de la première colonne qui a le plus haut degré. Or cet élément, x^{m-n-1}, occupe le $(m+n-2p)^{\text{ième}}$ rang dans la première colonne. Le terme qu'il fournit est donc $(-1)^{m+n-2p+1} x^{m-n-1} \delta$, en désignant par δ le déterminant déduit de R_p par suppression de sa première colonne et de sa dernière ligne. Mais la dernière colonne de R_p ayant pour premier élément a_m et pour dernier élément b_n, tandis que tous les autres sont nuls, on voit que la dernière colonne de δ a pour premier élément a_m et que tous les autres éléments de cette colonne sont nuls; d'ailleurs cet élément a_m occupe dans la première ligne le $(m+n-2p-1)^{\text{ième}}$ rang; enfin le déterminant obtenu en supprimant dans δ la première ligne et la dernière colonne est R_{p+1}; par suite, on a $\delta = (-1)^{m+n-2p} a_m R_{p+1}$, en sorte que, fina-

lement, le terme du plus haut degré dans V_{m-p-1} est

$$(-1)^{2(m+n-2p)+1} a_m R_{p+1} x^{m-p-1}, \quad \text{ou} \quad -a_m R_{p+1} x^{m-p-1}.$$

Supposons maintenant $p = n$. D'après la définition de U_{n-p-1}, la première colonne de ce déterminant, pour $p = n$, n'a que des éléments nuls, au nombre de $m - n$. Par suite, le polynôme U_{-1} est identiquement nul.

Quant à V_{m-p-1}, sa première colonne, dans l'hypothèse $p = n$, a pour éléments $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{m-n-1}$. Or R_n est le déterminant d'ordre $m - n$ suivant

$$R_n = \begin{vmatrix} b_n & & \\ b_{n-1} & b_n & \\ \ldots & \ldots & \\ \ldots\ldots & \ldots & b_n \end{vmatrix} \quad (m - n \text{ lignes}),$$

tous les éléments placés au-dessus de la diagonale principale étant nuls. V_{m-n-1}, par définition, se déduit de R_n en remplaçant sa première colonne par les éléments qu'on vient de citer; c'est donc le déterminant d'ordre $m - n$ suivant :

$$V_{m-n-1} = \begin{vmatrix} x^0 & & \\ x^1 & b_n & \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{m-n-1} & \ldots & b_n \end{vmatrix} = x^0 (b_n)^{m-n-1} = (b_n)^{m-n-1}.$$

Lemme IV. — *Lorsque f et g ont pour plus grand commun diviseur un polynôme de degré p, le déterminant R_p est différent de zéro.*

Dans le cas où p est égal à n, on a immédiatement $R_p \equiv R_n = (b_n)^{m-n}$: ce déterminant est donc différent de zéro.

Supposons maintenant p inférieur à n.

Je vais démontrer que, dans ce cas, si R_p est nul, le

plus grand commun diviseur θ de f et g n'est pas de degré p, ou, ce qui revient évidemment au même, que dans l'hypothèse $R_p = 0$, si θ n'est pas de degré inférieur à p, il est nécessairement de degré supérieur à ce nombre.

Supposons, en effet, R_p nul. D'après la définition de ce déterminant, on a

$$R_p = \begin{vmatrix} a_{2p-n+1} & a_{2p-n+2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{p-1} & a_p & \cdots & \cdots & \cdots & a_m & & \\ a_p & a_{p+1} & \cdots & \cdots & a_m & & & \\ b_p & b_{p+1} & \cdots & b_n & & & & \\ b_{p-1} & b_p & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{2p-m+1} & b_{2p-m+2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

formule valable pour toute valeur de p, en faisant la convention que tous les éléments a ou b affectés d'un indice négatif ne sont pas autre chose que des zéros.

Multiplions la première colonne de R_p par x^p, et ajoutons à cette colonne les suivantes multipliées respectivement par x^{p+1}, x^{p+2}, ..., $x^{m+n-p-1}$. On obtient de la sorte un nouveau déterminant R qui est égal à $R_p x^p$; par conséquent R est nul, et il y a entre les éléments de chaque colonne de R une même relation linéaire et homogène, dans laquelle les coefficients ne sont pas tous nuls : nous allons écrire cette relation, en particulier, à l'égard des éléments de la première colonne.

D'après la façon dont on déduit R de R_p, on voit qu'un élément quelconque $a_{p-\lambda}$ pris parmi les $n-p$ premiers éléments de la première colonne de R_p et un élément quelconque $b_{p-\mu}$ pris parmi les $m-p$ der-

niers de cette colonne sont respectivement remplacés dans R par les éléments polynômes suivants :

$$A_\lambda \equiv a_{p-\lambda} x^p + a_{p-\lambda+1} x^{p+1} + \ldots + a_m x^{m+\lambda},$$
$$B_\mu \equiv b_{p-\mu} x^p + b_{p-\mu+1} x^{p+1} + \ldots + b_n y^{m+\mu}.$$

Cela posé, si l'on désigne par i un entier inférieur à p, on a

$$\begin{aligned} A_i &\equiv x^i (a_{p-i} x^{p-i} + \ldots + a_m x^m) \\ &\equiv x^i f - x^i (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-i-1} x^{p-i-1}), \end{aligned}$$

ou, en désignant par $A_{p-1,i}$ un polynôme de degré $p-1$ au plus,

$$(1) \qquad A_i \equiv x^i f - A_{p-1,i}.$$

D'autre part, si j désigne un entier égal ou supérieur à p, on a

$$\begin{aligned} A_j &\equiv x^j (a_{p-j} x^{p-j} + \ldots + a_m x^m) \\ &\equiv x^j (a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m), \end{aligned}$$

puisque les a affectés d'indices négatifs sont nuls, et, par suite,

$$(2) \qquad A_j \equiv x^j f.$$

D'après les formules (1) et (2), on peut donc poser, d'une façon générale, que λ soit inférieur, égal ou supérieur à p,

$$(3) \qquad A_\lambda \equiv x^\lambda f - A_{p-1,\lambda},$$

en appelant $A_{p-1,\lambda}$ un polynôme de degré $p-1$ au plus, qui peut être identiquement nul.

On démontre exactement de même qu'on a

$$(4) \qquad B_\mu \equiv x^\mu g - B_{p-1,\mu},$$

où $B_{p-1,\mu}$ désigne un polynôme qui, s'il n'est pas identiquement nul, est au plus de degré $p-1$.

Il résulte alors des formules (3) et (4) que la rela-

tion identique qui existe entre les éléments de la première colonne de R peut s'écrire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-p-1} \alpha_\lambda (x^\lambda f - A_{p-1,\lambda}) + \sum_{\mu=0}^{\mu=m-p-1} \beta_\mu (x^\mu g - B_{p-1,\mu}) \equiv 0,$$

ou bien

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & f \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-p-1} \alpha_\lambda x^\lambda + g \sum_{\mu=0}^{\mu=m-p-1} \beta_\mu x^\mu \\ & \equiv \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-p-1} \alpha_\lambda A_{p-1,\lambda} + \sum_{\mu=0}^{\mu=m-p-1} \beta_\mu B_{p-1,\mu}, \end{aligned} \right.$$

les diverses valeurs des coefficients α_λ et β_μ n'étant pas toutes nulles.

Supposons alors que le plus grand commun diviseur θ de f et g ne soit pas de degré inférieur à p; θ est donc de degré supérieur à $p-1$. Or il divise le premier membre de l'identité (5), comme diviseur commun à f et g; par suite, il divise le second membre; mais celui-ci est de degré $p-1$ au plus, puisque les divers polynômes $A_{p-1,\lambda}$, $B_{p-1,\mu}$ sont au plus de degré $p-1$, quand ils ne sont pas identiquement nuls; donc, θ étant de degré supérieur à $p-1$, le second membre de (5) est identiquement nul. Alors cette identité se réduit à

$$(6) \qquad f \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-p-1} \alpha_\lambda x^\lambda - g \sum_{\mu=0}^{\mu=m-p-1} \beta_\mu x^\mu \equiv 0.$$

Observons que, l'entier p étant, dans l'hypothèse actuelle, au plus égal à l'entier non négatif $n-1$, aucune des diverses valeurs que prennent λ et μ dans (6) n'est négative, et que, par conséquent, les coefficients de f et g dans cette identité sont des polynômes entiers en x. D'ailleurs ces polynômes ne sont ni l'un ni l'autre

identiquement nuls : en effet, l'évanouissement de l'un d'eux entraînerait, en vertu de l'identité (6) elle-même, l'évanouissement de l'autre, puisque ni f ni g n'est identiquement nul ; mais alors toutes les valeurs des coefficients α_λ, β_μ seraient nulles, contrairement à ce qu'on a établi plus haut.

En résumé, l'existence de l'identité (6), dans les conditions que nous venons de préciser, prouve qu'il y a deux polynômes entiers u, v non évanouissants, dont les degrés respectifs sont au plus égaux à $n-p-1$ et $m-p-1$, qui satisfont à l'identité $uf+vg \equiv 0$. Par conséquent, d'après le théorème fondamental démontré au début de cette Note, θ est au moins de degré $p+1$, c'est-à-dire de degré supérieur à p.

Il est donc prouvé par ce qui précède que, lorsque R_p est nul, si θ n'est pas de degré inférieur à p, il est de degré supérieur. L'existence d'un plus grand commun diviseur de degré p est donc incompatible avec la condition $R_p = 0$: elle exige qu'on ait $R_p \gtrless 0$.

Ces lemmes préliminaires vont nous permettre de démontrer très simplement quatre théorèmes, dont les deux premiers fournissent chacun individuellement, sous des formes différentes, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le plus grand commun diviseur θ de f et g soit de degré p, le troisième donne explicitement l'expression de ce polynôme θ, enfin le dernier donne les quotients de f et g divisés par θ.

Théorème I. — *Pour que le plus grand commun diviseur θ de f et g soit de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_{p-1,1} = R_{p-1,2} = \ldots = R_{p-1,p-1} = R_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad R_p \gtrless 0.$$

En effet, supposons que θ soit de degré p. Le

lemme IV montre déjà qu'on a $R_p \gtrless 0$. D'autre part, changeons p en $p - 1$ dans les identités du lemme I et du lemme II, celles-ci deviennent

$$(1) \quad \begin{cases} D_{p-1} = R_{p-1,1}x^0 + R_{p-1,2}x^1 + \ldots \\ \qquad + R_{p-1,p-1}x^{p-2} + R_{p-1}x^{p-1}, \end{cases}$$

$$(2) \quad D_{p-1} = U_{n-p}f + V_{m-p}g.$$

En vertu de l'identité (2), θ qui divise f et g divise aussi D_{p-1}, ce qui exige que ce dernier polynôme soit identiquement nul, puisqu'il est de degré $p-1$ au plus, tandis que θ est de degré p. Mais alors, d'après (1), on a

$$R_{p-1} = R_{p-1,2} = \ldots = R_{p-1,p-1} = R_{p-1} = 0.$$

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Réciproquement, supposons ces conditions remplies. D'après (1), D_{p-1} est identiquement nul, et, par suite, d'après (2), on a

$$(3) \quad U_{n-p}f + V_{m-p}g \equiv 0.$$

Or, d'après le lemme III, les termes de degrés $n-p$ et $m-p$ dans U_{n-p} et V_{m-p} ont pour coefficients respectifs $b_n R_p$, $-a_m R_p$. Mais a_m et b_n sont essentiellement différents de zéro, d'autre part R_p est aussi différent de zéro, puisqu'on suppose remplies les conditions indiquées par l'énoncé ; donc U_{n-p} et V_{m-p} sont exactement des degrés marqués par leurs indices. Alors, en vertu du théorème fondamental établi au début et de l'identité (3), le degré de θ est au moins p. D'ailleurs, à cause de l'identité du lemme II, θ divise D_p, qui n'est que de degré p au plus ; le degré de θ ne peut donc être supérieur à p, à moins que D_p soit identiquement nul, ce qui exige, d'après le lemme I, qu'on ait en particulier $R_p = 0$, résultat contraire à l'une des conditions qu'on suppose remplies. Par conséquent, θ est exacte-

ment de degré p, et les conditions énoncées sont suffisantes.

Théorème II. — *Pour que f et g aient un plus grand commun diviseur θ de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = R_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad R_p \gtrless 0.$$

En effet, soit p le degré de θ. Chacun des polynômes D_0, D_1, D_2, ..., D_{p-1} est divisible par θ, d'après les identités qu'on déduit de celle du lemme II en remplaçant p successivement par $0, 1, 2, \ldots, p-1$; tous ces polynômes sont de degré inférieur à p : donc chacun d'eux est identiquement nul. En particulier, les coefficients de la plus haute puissance de x dans ces polynômes sont nuls; or ces coefficients sont $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$. Enfin, le lemme IV a eu pour objet de démontrer la condition $R_p \gtrless 0$. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Réciproquement, supposons qu'on ait

$$(\alpha) \qquad R_i = 0 \quad \text{pour} \quad i < p \qquad \text{et} \qquad R_p \gtrless 0.$$

Soit q le degré de θ; d'après la partie directe qui vient d'être démontrée, on a

$$(\beta) \qquad R_i = 0 \quad \text{pour} \quad i < q, \qquad \text{et} \qquad R_q \lessgtr 0.$$

La coexistence des conditions (α) et des conditions (β) entraîne évidemment la condition $q = p$; le degré de θ est donc p et les conditions énoncées sont suffisantes.

Théorème III. — *Lorsque f et g ont pour plus grand commun diviseur θ un polynôme de degré p, θ est, à un facteur constant près, le polynôme D_p dont l'expression développée est fournie par le lemme I.*

En effet, le terme du plus haut degré de D_p est $R_p x^p$, d'après le lemme I. En vertu du lemme IV, R_p est différent de zéro. Donc D_p est exactement de degré p; mais, d'après l'identité du lemme II, il est divisible par θ, qui, par hypothèse, est lui-même de degré p. Par conséquent, θ ne diffère de D_p que par un facteur indépendant de x.

Remarque. — Lorsque p est égal à n, le lemme II donne

$$D_n \equiv U_{-1} f + V_{m-n-1} g.$$

Or, le lemme III apprend que U_{-1} est identiquement nul et que V_{m-n-1} se réduit à $(b_n)^{m-n-1}$. On a donc

$$D_n \equiv (b_n)^{m-n-1} g.$$

θ n'est donc autre chose que g, ainsi que cela était évident *a priori*.

THÉORÈME IV. — *Lorsque le plus grand commun diviseur* θ *de* f *et* g *est de degré* p, *les quotients de* f *et* g *divisés par* θ *sont respectivement* HV_{m-p}, $-HU_{n-p}$, *en désignant par* H *une constante qui, si l'on prend* $\theta \equiv D_p$, *a pour valeur*

$$-\left(\frac{1}{R_p}\right)^2.$$

En effet, on a, par application des lemmes I et II,

$$\begin{aligned} D_{p-1} \equiv R_{p-1,1} x^0 + R_{p-1,2} x^1 + \ldots + R_{p-1,\,p-1} x^{p-2} \\ + R_{p-1} x^{p-1} \equiv U_{n-p} f + V_{m-p} g. \end{aligned}$$

Le polynôme θ de degré p, divisant f et g, divise donc D_{p-1} : or celui-ci n'est que de degré $p-1$ au plus; il est donc identiquement nul et l'on a, par suite,

$$(1) \qquad U_{n-p} f + V_{m-p} g \equiv 0.$$

D'ailleurs, d'après le lemme III, les polynômes U_{n-p},

V_{m-p} ont respectivement pour termes de degrés les plus élevés $b_n R_p x^{n-p}$, $-a_m R_p x^{m-p}$ et, par conséquent, en vertu de la condition essentielle $a_m b_n \gtrless 0$ et de la condition $R_p \gtrless 0$ qui résulte du lemme IV, ils sont exactement des degrés $n-p$ et $m-p$.

Soient alors φ et γ les quotients obtenus en divisant f et g par θ. L'identité (1) peut s'écrire

$$U_{n-p}\varphi\theta + V_{m-p}\gamma\theta \equiv 0,$$

ou, puisque θ n'est pas identiquement nul,

$$(2) \qquad U_{n-p}\varphi + V_{m-p}\gamma \equiv 0.$$

D'après (2), φ divise $V_{m-p}\gamma$, mais il est premier avec γ, dont il divise V_{m-p} et, par conséquent, φ et V_{m-p} étant tous deux de degré $m-p$, on a

$$(3) \qquad \varphi \equiv HV_{m-p},$$

en désignant par H un facteur indépendant de x. En tenant compte de (3), la relation (2) donne alors

$$(4) \qquad \gamma \equiv -HU_{n-p}.$$

Si l'on prend $\theta \equiv D_p$, le polynôme f, identique à $\varphi\theta$, est identique à $HD_p V_{m-p}$ et a, par suite, même terme de degré m que lui, ce qui donne

$$a_m = HR_p(-a_m R_p),$$

d'où

$$(5) \qquad H = -\left(\frac{1}{R_p}\right)^2.$$

Les formules (3), (4) et (5) démontrent le théorème.

Seconde Partie.

Définitions. — Soient encore les deux polynômes entiers

$$f \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$
$$g \equiv b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n,$$

m étant supérieur ou égal à n.

Posons

$$f_p = a_{p+1} + a_{p+2} x + \ldots + a_m x^{m-(p+1)},$$
$$g_p \equiv b_{p+1} + b_{p+2} x + \ldots + b_n x^{n-(p+1)},$$

p désignant un nombre entier au plus égal à n, avec la convention $g_n \equiv 0$.

Appelons c_{ij} le coefficient de x^j dans le polynôme entier

$$g_i f - f_i g,$$

et r_0 le déterminant d'ordre m suivant

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & c_{0,m-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & c_{1,m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots\cdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & c_{n-1,2} & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & c_{n-1,m-1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & b_n & & \\ & & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & & \\ & & & b_0 & b_1 & b_2 & \cdot\cdot & \cdots & b_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} n \text{ lignes} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} m-n \text{ lignes}; \end{array}$$

r_0 est le résultant de Bezout. Les coefficients c_{ij} y occupent un rectangle, et les coefficients b un parallélogramme en dehors desquels nous supposons des zéros à toutes les places laissées vides.

Supprimons dans r_0 les p premières lignes ; il reste alors un Tableau rectangulaire que nous désignerons par t_p.

Si l'on supprime les p premières colonnes de t_p, il reste un Tableau carré, dont nous appelons r_p le déterminant des éléments. On voit, en somme, que r_p se déduit de r_0 en y supprimant les p premières lignes et les p premières colonnes.

Soit i l'un des nombres $1, 2, 3, \ldots, p$. J'appelle $r_{p,i}$ le déterminant déduit de r_p en y remplaçant la première colonne par la colonne qui, dans le Tableau t_p, occupe le rang i.

Je désigne par d_p le déterminant obtenu au moyen de r_p en ajoutant à sa première colonne multipliée par x_p les p premières colonnes du Tableau t_p respectivement multipliées par $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$.

J'appelle enfin u_{n-p-1} et v_{m-p-1} les deux déterminants obtenus en remplaçant successivement la première colonne de r_p par celles-ci :

$$\begin{array}{cc}
g_p & -f_p \\
g_{p-1} & -f_{p+1} \\
\cdot & \cdot \\
g_{n-1} & -f_{n-1} \\
0 & x^0 \\
\cdot & x^1 \\
\cdot & \cdot \\
0 & x^{m-n-1}.
\end{array}$$

Ces définitions posées, nous allons établir plusieurs lemmes importants :

Lemme 1. — *L'expression développée du polynôme d_p est*

$$d_p = r_{p,1}x^0 + r_{p,2}x^1 + \ldots + r_{p,p}x^{p-1} + r_p x^p.$$

En effet, d'après sa définition, d_p est la somme de $p+1$ déterminants qui se déduisent de r_p en y remplaçant successivement la première colonne par les $p+1$ premières colonnes de t_p, respectivement multipliées

par x^0, x^1, x^2, ..., x^p. Or, ces déterminants sont précisément les déterminants $r_{p,i}(i=1, 2, \ldots, p)$ et r_p, définis plus haut, qu'on a multipliés respectivement par x^0, x^1, x^2, ..., x^p; ce qui démontre le lemme.

Lemme 2. — *On a identiquement*

$$d_p = u_{n-p-1} f + v_{m-p-1} g.$$

En effet, d_p ne change pas si l'on ajoute aux éléments de sa première colonne les éléments correspondants des colonnes suivantes respectivement multipliés par x^{p+1}, x^{p+2}, ..., x^{m-1}. Cette première colonne devient ainsi

$$\left|\begin{array}{l} c_{p,0} + c_{p,1}x + \ldots + c_{p,m-1}x^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1,0} + c_{n-1,1}x + \ldots + c_{n-1,m-1}x^{m-1} \\ b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n \\ b_0 x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0 x^{m-n-1} + \ldots + b_n x^{m-1} \end{array}\right|, \quad \text{ou bien} \quad \left|\begin{array}{c} g_p f - f_p g \\ \ldots\ldots \\ g_{n-1} f - f_{n-1} g \\ 0.f + x^0 g \\ 0.f + x^1 g \\ \ldots\ldots \\ 0.f + x^{m-n-1} g. \end{array}\right.$$

On voit alors que d_p est la somme des deux déterminants obtenus en remplaçant la première colonne de r_p, d'abord par les premiers termes, ensuite par les seconds termes des éléments binômes qu'on vient d'écrire. Ces déterminants contiennent en facteur, l'un f, l'autre g, et l'on voit que les multiplicateurs de f et g sont les déterminants désignés par la notation u_{n-p-1}, v_{m-p-1}; ce qui démontre l'identité annoncée.

Lemme 3. — *Les termes du plus haut degré dans u_{n-p-1} et v_{m-p-1} sont*

$$b_n r_{p+1} x^{n-p-1} \qquad \text{et} \qquad -a_m r_{p+1} x^{m-p-1},$$

à moins que p soit égal à n, auquel cas le premier polynôme u_{-1} est identiquement nul, et le second v_{m-n-1} se réduit à $(b_n)^{m-n-1}$.

En effet, supposons d'abord $p < n$: les éléments de la

première colonne de u_{n-p-1} sont des polynômes entiers en x dont les indices vont en croissant et, par conséquent, dont les degrés vont en déeroissant, d'après la définition de ces polynômes. Alors, en développant u_{n-p-1} par rapport aux éléments de sa première colonne, comme les mineurs correspondants sont indépendants de x, on obtient un polynôme entier, dont le degré est celui de g_p, c'est-à-dire $n-p-1$, et le terme du plus haut degré a pour coefficient le produit de b_n, coefficient de x^{n-p-1} dans g_p, par le mineur de u_{n-p-1} relatif à l'élément g_p. Ce mineur est le déterminant qu'on déduit de r_p par la suppression de sa première ligne et de sa première colonne, c'est-à-dire r_{p+1}.

Dans v_{m-p-1}, les éléments de la première colonne sont : d'abord une suite de polynômes, dont le premier $-f_p$ est celui de degré le plus élevé, puis une suite d'éléments monômes, dont le dernier x^{m-n-1} a le degré le plus élevé. Le degré de f_p est $m-p-1$, nombre supérieur à $m-n-1$, puisque par hypothèse on a $p<n$. Le degré de v_{m-p-1} est donc $m-p-1$, et le coefficient de x^{m-p-1} dans ce polynôme est, comme on le voit immédiatement, $-a_m r_{p+1}$.

Supposons maintenant $p=n$. Puisque g_n est identiquement nul, la première colonne de u_{n-p-1} (pour $p=n$) a tous ses éléments nuls, et par suite le polynôme u_{-1} est identiquement nul. Quant au déterminant v_{m-p-1}, dans l'hypothèse $p=n$, sa première colonne a pour éléments $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{m-n-1}$ dont les coefficients, dans le déterminant développé, sont les mineurs relatifs à la première colonne de r_n. Or on a évidemment

$$r_n = \begin{vmatrix} b_n & & \\ b_{n-1} & b_n & \\ \cdots\cdot & \cdots & \\ \cdots\cdot & \cdots & b_n \end{vmatrix} \quad (m-n \text{ lignes}),$$

tous les éléments au-dessus de la diagonale principale étant nuls, et, par suite,

$$v_{m-n-1} = \begin{vmatrix} x_0 & & & \\ x^1 & b_n & & \\ \cdot\cdot & \cdots & & \\ x^{m-n-1} & \cdots & & b_n \end{vmatrix} = x_0(b_n)^{m-n-1} = (b_n)^{m-n-1}.$$

Lemme 4. — *Lorsque f et g ont un plus grand commun diviseur de degré p, le déterminant r_p est différent de zéro.*

La proposition est évidente pour $p = n$, attendu que l'on a

$$r_n = (b_n)^{m-n}.$$

Supposons maintenant p inférieur à n. D'après la définition de r_p, on a

$$r_p = \begin{vmatrix} c_{p,p} & c_{p,p+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{p,m-1} \\ c_{p+1,p} & c_{p+1,p+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{p+1,m-1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ c_{n-1,p} & c_{n-1,p+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n-1,m-1} \\ b_p & b_{p+1} & \cdots & b_n & & & \\ b_{p-1} & b_p & \cdots & \cdots & b_n & & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{p-m+n+1} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-p \text{ lignes}, \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-n \text{ lignes}, \end{matrix}$$

formule valable pour toute valeur de p, en faisant la convention que tous les éléments b affectés d'un indice négatif ne sont pas autre chose que des zéros.

Ajoutons à la première colonne multipliée par x^p les suivantes multipliées respectivement par x^{p+1}, x^{p+2}, ..., x^{m-1}. On obtient de la sorte un nouveau déterminant r qui est égal à $r_p x^p$; par conséquent, si l'on suppose r_p nul, r est nul aussi, et il y a entre les éléments de chaque colonne de r une même relation linéaire et homogène dans laquelle les coefficients ne sont pas tous nuls :

nous allons écrire cette relation, en particulier, à l'égard des éléments de la première colonne.

D'après la façon dont on déduit r de r_p, on voit qu'un élément quelconque c_{ip}, qui figure en tête de l'une des $n - p$ premières lignes de r_p, se trouve remplacé dans r par l'élément polynôme

$$C_i \equiv c_{i,p} x^p + c_{i,p+1} x^{p+1} + \ldots + c_{i,m-1} x^{m-1}.$$

On peut écrire C_i sous la forme

$$C_i \equiv c_{i,0} x^0 + c_{i,1} x^1 + \ldots \\ + c_{i,m-1} x^{m-1} - (c_{i,0} x^0 + c_{i,1} x^1 + \ldots + c_{i,p-1} x^{p-1})$$

ou, d'après la définition de $c_{i,j}$ et en appelant $C_{i,p-1}$ le polynôme de degré $p - 1$ au plus qui est placé entre parenthèses,

$$(1) \qquad C_i \equiv g_i f - f_i g - C_{i,p-1}.$$

D'autre part, tout élément b_{p-k} situé en tête de l'une des $m - n$ dernières lignes est remplacé dans r par

$$B_k \equiv b_{p-k} x^p + b_{p-k+1} x^{p+1} + \ldots + b_n x^{n+k}.$$

Or, si h désigne un entier inférieur à p, on a

$$\begin{aligned} B_h &\equiv x^h (b_{p-h} x^{p-h} + \ldots + b_n x^n) \\ &\equiv x^h [b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x_n \\ &\qquad - (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{p-h-1} x^{p-h-1})] \\ &\equiv x_h g - (b_0 x^h + b_1 x^{h+1} + \ldots + b_{p-h-1} x^{p-1}), \end{aligned}$$

ou, en désignant par $B_{h,p-1}$ le polynôme de degré $p - 1$ au plus qui est placé entre parenthèses,

$$(2) \qquad B_h \equiv x^h g - B_{h,p-1}.$$

Si l désigne un entier égal ou supérieur à p, on a

$$B_l \equiv x^l (b_{p-l} x^{p-l} + \ldots + b_n x^n) \equiv x^l (b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x_n).$$

puisque les coefficients b affectés d'indices négatifs sont nuls, et, par suite,

$$(3)\qquad B_l \equiv x^l g.$$

D'après les formules (2) et (3), on peut donc poser, d'une façon générale, que k soit inférieur, égal ou supérieur à p,

$$(4)\qquad B_k \equiv x^k g - B_{k,p-1},$$

en appelant $B_{k,p-1}$ un polynôme de degré $p-1$ au plus, qui peut être identiquement nul.

Il résulte alors des formules (1) et (4) que la relation identique qui existe entre les éléments de la première colonne de r peut s'écrire

$$\sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i (g_i f - f_i g - C_{i,p-1}) + \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \beta_k (x^k g - B_{k,p-1}) \equiv 0,$$

ou bien

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} & f \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i g_i + g \left[- \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i f_i + \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \beta_k x^k \right] \\ & \qquad = \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i C_{i,p-1} + \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \beta_k B_{k,p-1}, \end{aligned} \right.$$

les diverses valeurs des coefficients α_i, β_k n'étant pas toutes nulles.

Puisque g_i est un polynôme entier de degré $n-(i+1)$, le coefficient de f dans (5) est un polynôme entier dont le degré est au plus $n-p-1$.

Le coefficient de g, dans (5), est la somme de deux termes dont le premier est un polynôme entier de degré $m-p-1$ au plus, puisque f_i est un polynôme entier de degré $m-(i+1)$, et le second est un polynôme entier de degré $m-n-1$ au plus; par conséquent, $m-n-1$ étant inférieur à $m-p-1$, puisqu'on a,

par hypothèse, $p < n$, le coefficient de g est un polynôme entier de degré $m - p - 1$ au plus.

Enfin, les polynômes $C_{i,p-1}$, $B_{k,p-1}$ étant chacun de degré $p - 1$ au plus, le second membre de (5) est un polynôme entier de degré $p - 1$ au plus.

Cela posé, si le plus grand commun diviseur θ de f et g n'est pas de degré inférieur à p, il est de degré supérieur à $p - 1$. Or il divise le premier membre de (5) et, par conséquent, aussi le second; mais celui-ci est de degré $p - 1$ au plus : il est donc identiquement nul. Alors l'identité (5) se réduit à

$$(6) \quad f \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i g_i + g \left[- \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i f_i + \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \beta_k x^k \right] \equiv 0,$$

les coefficients α et β n'étant pas tous nuls.

Aucun des deux polynômes entiers, coefficients respectifs de f et de g dans (6), ne peut être identiquement nul sans que l'autre le soit aussi, en vertu de l'identité (6) elle-même, puisque ni f ni g n'est évanouissant. Or on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=p}^{i=n-1} \alpha_i g_i \equiv \alpha_p(b_{p+1} &+ b_{p+2}x + \ldots + b_n x^{n-p-1}) \\ &+ \alpha_{p+1}(b_{p+2} + \ldots + b_n x^{n-p-2}) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \alpha_{n-2}(b_{n-1} + b_n x) \\ &+ \alpha_{n-1} b_n. \end{aligned}$$

Pour que ce polynôme soit identiquement nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} &\alpha_p b_{p+1} + \alpha_{p+1} b_{p+2} + \ldots + \alpha_{n-2} b_{n-1} + \alpha_{n-1} b_n = 0, \\ &\alpha_p b_{p+2} + \alpha_{p+1} b_{p+3} + \ldots + \alpha_{n-2} b_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha_p b_{n-1} + \alpha_{p+1} b_n = 0, \\ &\alpha_p b_n = 0. \end{aligned}$$

Comme b_n est différent de zéro, la dernière de ces équations exige que α_p soit nul; l'avant-dernière donne alors $\alpha_{p+1} = 0$, et ainsi de suite, de proche en proche, on voit que tous les α doivent être nuls. Mais alors le coefficient de g se réduit à $\Sigma\beta_k x^k$; or, on a vu qu'il s'évanouit en même temps que le coefficient de f; donc tous les coefficients β sont nuls.

En résumé, si les deux polynômes, coefficients de f et g dans (6), sont identiquement nuls, tous les coefficients α et tous les coefficients β sont nuls, résultat en contradiction avec l'existence, démontrée plus haut, de l'identité (6) pour des valeurs des α et des β non toutes nulles. Il en résulte, par conséquent, que les polynômes, coefficients de f et g dans (6), ne sont ni l'un ni l'autre identiquement nuls.

Alors, l'existence de l'identité (6), dans les conditions que l'on vient de préciser, montre qu'il y a deux polynômes entiers u, v, non évanouissants, dont les degrés respectifs sont au plus $n-p-1$ et $m-p-1$, qui satisfont à l'identité $uf+vg\equiv 0$. Par conséquent, d'après le théorème fondamental rappelé au début de ce travail, θ est au moins de degré $p+1$.

En somme, lorsque r_p est nul, si θ n'est pas de degré inférieur à p, il est de degré supérieur et, par suite, enfin, lorsque θ est de degré p, on a

$$r_p \gtrless 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il suffit maintenant de remarquer que les théorèmes I, II, III, IV de la première Partie résultent uniquement du théorème fondamental et des lemmes I, II, III, IV, puis d'observer la parfaite analogie des lemmes 1, 2, 3, 4 de la seconde Partie avec ceux de la première, pour que l'on puisse énoncer et admettre, sans nouvelle démon-

stration, les théorèmes suivants, correspondant aux quatre théorèmes de la première Partie.

Théorème 1. — *Pour que f et g aient un plus grand commun diviseur de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$r_{p-1,1} = r_{p-1,2} = \ldots = r_{p-1,\,p-1} = r_{p-1} = 0 \qquad et \qquad r_p \gtrless 0.$$

Théorème 2. — *Pour que f et g aient un plus grand commun diviseur de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} = 0 \qquad et \qquad r_p \gtrless 0.$$

Théorème 3. — *Lorsque f et g ont un plus grand commun diviseur de degré p, ce polynôme est, à un facteur constant près, d_p, dont l'expression développée est fournie par le lemme 1. Lorsque p est égal à n, le plus grand commun diviseur est*

$$d_n \equiv (b_n)^{m-n-1} g.$$

Théorème 4. — *Les quotients respectifs de f et g divisés par leur plus grand commun diviseur d_p sont*

$$-\left(\frac{1}{r_p}\right)^2 v_{m-p}, \quad \left(\frac{1}{r_p}\right)^2 u_{n-p}.$$

SUR L'EXISTENCE DE TROIS RACINES RÉELLES DE L'ÉQUATION QUI DÉTERMINE LES AXES PRINCIPAUX D'UN CONE;

Par M. Fritz HOFMANN.

L'équation

$$(\Delta) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

(où tous les termes de la diagonale sont de la forme $a_{ii} - \lambda$, et où nous supposons $a_{ik} = a_{ki}$), c'est-à-dire l'équation *séculaire* (LAPLACE, *Mécan. cél.*, Ire Partie, p. 2, art. 55) donne des racines exclusivement réelles quand elle est résolue par rapport à λ.

La démonstration de ce théorème général a occupé les géomètres depuis longtemps. Parmi les démonstrations données, je mentionne celles qui se trouvent citées dans les *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, par M. SALMON, art. 26, exemple 10 (donnée par M. SYLVESTER, *Philosoph. Magazine*; 1852) et art. 46 (donnée par M. BORCHARDT, *Journal de Liouville*, t. XII, p. 50).

Nous tâcherons de donner une démonstration tout à fait élémentaire de ce théorème pour le cas où le degré de l'équation et le nombre des lignes et colonnes du déterminant (Δ) se réduisent à 3. C'est le cas qui revient le plus souvent dans la Géométrie pure et dans la Mécanique.

La solution de l'équation suivante

$$(\Delta_3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

équivaut à la solution du problème : déterminer les trois axes principaux d'un cône du deuxième degré. Nous nous proposons de démontrer que cette équation (Δ_3) a trois racines λ exclusivement réelles. Une partie de la démonstration sera de nature transcendante, en s'appuyant sur un théorème d'Analyse; la seconde partie nécessitera seulement les opérations les plus élémentaires de la Géométrie synthétique.

I. Étant donnée l'équation d'un cône dont l'origine

est le sommet

$$(A)\qquad \begin{cases} 0 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 \\ \qquad + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \end{cases}$$

l'équation du plan polaire du point (x', y', z'), pris par rapport au cône (A), s'écrit

$$(B)\qquad \begin{cases} 0 = (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x \\ \quad +(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y \\ \quad +(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z. \end{cases}$$

Si un point (x', y', z') de l'espace était connu dont le plan polaire (B) fût perpendiculaire au rayon mené de l'origine au point (x', y', z'), ce rayon même serait un axe principal du cône A.

Or on connaît l'équation d'un plan passant par l'origine et perpendiculaire à la droite qui joint l'origine à un point (x', y', z') :

$$(C)\qquad 0 = xx' + yy' + zz'.$$

Les deux plans (B) et (C) coïncideront si les coefficients homologues des deux équations (B) et (C) sont égaux à un facteur λ près; c'est-à-dire si l'on a en même temps

$$\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' = \lambda x', \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' = \lambda y', \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' = \lambda z'. \end{cases}$$

ou

$$(D)\qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x' + a_{12}y' + a_{13}z' = 0, \\ a_{21}x' + (a_{22} - \lambda)y' + a_{23}z' = 0, \\ a_{31}x' + a_{32}y' + (a_{33} - \lambda)z' = 0. \end{cases}$$

En général, les coefficients a_{ik} et le facteur de proportionnalité λ pris *à volonté*, il n'y aura pas de solutions (x', y', z') communes aux trois équations du système (D). Mais, quand on a trouvé un λ qui rend les trois équa-

tions (D) accordables entre elles, la détermination des rapports $x' : y' : z'$ est un problème linéaire.

Mais c'est justement l'équation

$$\Delta_3 = 0$$

qui constitue la condition nécessaire et suffisante pour que les trois équations (D) puissent coexister. Pour déterminer les points x', y', z' situés sur un axe principal, il faut donc résoudre une équation du troisième degré en λ. Cette équation, étant de degré *impair,* a toujours au moins *une* racine réelle : c'est l'emploi de ce théorème appartenant à l'analyse qui constitue ce que nous avons nommé *la partie transcendante de notre démonstration.*

II. Après avoir déterminé *une* racine réelle de l'équation $\Delta_3 = 0$, nous retournerons au système (D) qui nous permet de trouver les rapports $x' : y' : z'$ en employant deux quelconques des trois équations (D).

Par exemple, de

$$\text{(E)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda) x' + a_{12} y' + a_{13} z' = 0, \\ a_{21} x' + (a_{22} - \lambda) y' + a_{23} z' = 0. \end{array} \right.$$

on tire

$$\text{(F)} \quad x' : y' : z' = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} - \lambda \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Ainsi un axe principal du cône (A) est trouvé; nous l'appelons p. Il coïncide avec le rayon qui va de l'origine à tous les points de l'espace dont les coordonnées x', y', z' satisfont à (F); car, en substituant les valeurs x', y', z' dans les deux équations (B), on trouverait que ces deux plans coïncident.

Nous appellerons B_p le plan polaire d'un point (x', y', z') sur p; nous verrons plus tard que, pour nos conclusions,

les deux cas, où B_p coupe le cône et où il ne le coupe pas, n'offrent pas de différence essentielle.

Sur ce plan polaire B_p d'un point (x', y', z') situé sur p, il y a un nombre infini de couples de droites qui passent par l'origine et sont conjuguées, deux à deux, par rapport au cône (A).

Si nous étions à même de déterminer un de ces couples dont les deux droites formeraient un angle droit à l'origine, nous aurions déterminé en même temps les deux axes principaux du cône qui restent encore inconnus.

Car, imaginons deux droites d_1 et d_2, situées dans le plan polaire B_p de la ligne p, conjuguées par rapport au cône et perpendiculaires l'une à l'autre, passant par l'origine, comme cela doit être. Le plan polaire du rayon d_1 passera par p et par d_2 et sera perpendiculaire à d_1, puisqu'il contient deux droites p et d_2 qui sont perpendiculaires à d_1. Donc d_1 et d_2 seraient les deux autres axes principaux du cône.

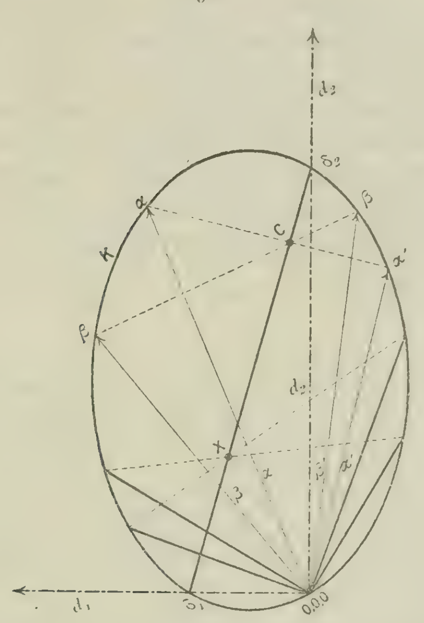
Pour trouver les deux rayons par l'origine dans le plan B_p, qui soient en même temps conjugués pour (A) et perpendiculaires entre eux, on mènera dans le plan B_p une section conique K par l'origine (*fig.* 1). On construira, quand B_p ne coupe pas le cône, deux fois un couple de deux droites conjuguées par rapport à (A), par exemple les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$.

On sait qu'après avoir construit le point C de la manière indiquée dans la figure (comme point d'intersection des deux droites qui joignent les points où les droites d'un couple rencontrent la section conique), on peut l'employer pour donner tous les couples de droites conjuguées du plan B_p.

On sait de même que, quand on inscrit un triangle quelconque à angle droit dans la section conique K, de manière que le sommet de l'angle droit coïncide avec

un point fixe o, o, o de la section conique, l'hypoténuse de ce triangle passe toujours par un point fixe X *à l'intérieur* ([1]) de la section conique.

Fig. 1.



En joignant les deux points X et C, on obtient deux points d'intersection de cette droite de jonction avec K : δ_1, δ_2.

Les rayons qui vont de l'origine à δ_1 et δ_2 sont les deux axes d_1, d_2 cherchés ; on sait qu'ils sont conjugués par rapport au cône, puisque le point C (le centre de

---

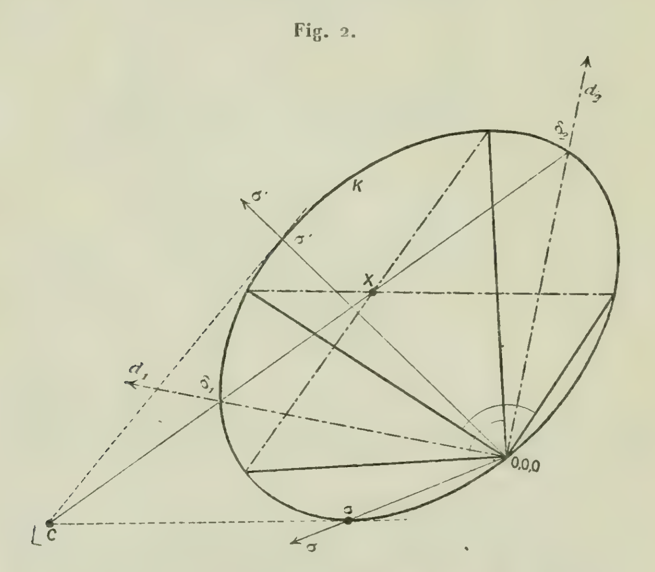
([1]) Si le point X pouvait se trouver *extérieur* à la section conique, il fournirait deux points de contact ξ_1, ξ_2 réels de ses tangentes à K ; mais les deux droites qui forment un angle droit ne peuvent jamais coïncider en une seule droite (o, o, o) à ξ_1.

l'involution) est sur la même droite avec les deux points où le couple $d_1 d_2$ rencontre la section conique; on sait de même qu'ils sont perpendiculaires, puisque cette droite passe par X.

La *fig.* 1 se rapporte au cas où le plan polaire de la droite p n'aurait pas coupé le cône (A). Mais, quand le plan B_p rencontre le cône (A) en deux droites réelles, la figure et la construction de $d_1\, d_2$ se simplifient encore.

Étant données les deux droites $\sigma\sigma'$ où B_p rencontre le cône (A), on construira les tangentes à K aux points d'intersection de σ et σ' avec K; ce qui donne un point d'intersection de ces deux tangentes C (*fig.* 2).

Fig. 2.



Les constructions suivantes sont les mêmes qu'auparavant. On joindra X et C, ce qui donne deux points d'intersection δ_1, δ_2 sur la courbe K. Les rayons qui vont de l'origine à δ_1 et δ_2 sont encore les solutions cherchées. Les droites d_1 et d_2 sont conjuguées par

rapport à (A), puisqu'elles séparent en rapport harmonique les directions σ et σ'; elles sont perpendiculaires puisque la droite $\delta_1 \delta_2$ passe par X.

La substitution des coordonnées $x'_1 : y'_1 : z'_1$ ou $x'_2 : y'_2 : z'_2$ (de points situés sur l'un ou l'autre de ces axes principaux) dans une équation quelconque du système (D) donnerait directement les deux valeurs de λ qui satisferaient à l'équation (Δ_3). On voit qu'elles sont bien réelles, puisque les coordonnées $x'_1 : y'_1 : z'_1$ ou $x'_2 : y'_2 : z'_2$, qui les établissent au moyen de (D), ont été trouvées *réelles*. Car une droite quelconque XC menée par un point X *à l'intérieur* d'une section conique coupera toujours la section conique en deux points δ_1, δ_2 *réels*.

On voit que c'est, en fin de compte, une *banalité* qui permet de démontrer la réalité des racines de l'équation séculaire, quand celle-ci est du troisième degré.

Malheureusement notre méthode ne saurait être étendue à des degrés supérieurs à trois; hâtons-nous d'ajouter qu'elle ne veut prétendre ni à grande portée, ni à grande profondeur : elle ne veut que populariser en quelque sorte le résultat de l'Algèbre, en montrant que la géométrie synthétique, une racine λ une fois écartée par un procédé transcendant, sait non seulement *démontrer la réalité* des deux autres racines, mais encore les *construire*.

SUR UN THÉORÈME DE M. WEILL;

PAR M. WORONTZOFF, à Minsk (Russie).

En se fondant sur la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions partielles, M. Weill

donne le théorème suivant :

$$C_h^1 - 3\,C_h^3 + 3^2\,C_h^5 - \ldots = \pm\, 2^{h-1},$$

où C_h^n représente le nombre des combinaisons de h objets n à n et $h = 3m+1, 3m+2$ (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1887, p. 83). Cette formule curieuse peut être établie facilement par les procédés d'Algèbre élémentaire.

En effet, comme

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1, \qquad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m} = 1,$$

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m} \\
&= \frac{(-1)^{3m}}{2^{3m}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3m}^1 - 3\,C_{3m}^2 \\
&\qquad + i(\sqrt{3})^3\,C_{3m}^3 + 3^2\,C_{3m}^4 - i(\sqrt{3})^5\,C_{3m}^5 - \ldots\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+1} \\
&= \frac{(-1)^{3m+1}}{2^{3m+1}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3+m1}^1 - 3\,C_{3m+1}^2 \\
&\qquad + i(\sqrt{3})^3\,C_{3m+1}^3 \\
&\qquad + 3^2\,C_{3m+1}^4 - i(\sqrt{3})^5\,C_{3m+1}^5 - \ldots\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3m+2} \\
&= \frac{(-1)^{3m}}{2^{3m+2}}\Big[1 - i\sqrt{3}\,C_{3m+2}^1 - 3\,C_{3m+2} \\
&\qquad + i(\sqrt{3})^3\,C_{3m+2}^3 + 3^2\,C_{3m+2}^4 \\
&\qquad - i(\sqrt{3})^5\,C_{3m+2}^5 - \ldots\Big]
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
1 - 3\,C_{3m}^{2} + 3^2\,C_{3m}^{4} - \ldots &= (-2)^{3m},\\
1 - 3\,C_{3m+1}^{2} + 3^2\,C_{3m+1}^{4} - \ldots &= (-2)^{3m},\\
1 - 3\,C_{3m+2}^{2} + 3^2\,C_{3m+2}^{4} - \ldots &= (-2)^{3m+1},\\
C_{3m}^{1} - 3\,C_{3m}^{3} + 3^2\,C_{3m}^{5} - \ldots &= 0,\\
C_{3m+1}^{1} - 3\,C_{3m+1}^{3} + 3^2\,C_{3m+1}^{5} - \ldots &= (-2)^{3m},\\
C_{3m+2}^{1} - 3\,C_{3m+2}^{3} + 3^2\,C_{3m+2}^{5} - \ldots &= (-1)^{3m}\,2^{3m+1}.
\end{aligned}$$

Toutes ces égalités peuvent aussi s'obtenir au moyen des formules trigonométriques bien connues

$$\begin{aligned}
\cos\frac{2k\pi}{p} &= \cos^n\frac{2\pi}{p} - C_n^2 \sin^2\frac{2\pi}{p}\cos^{n-2}\frac{2\pi}{p}\\
&\quad + C_n^4 \sin^4\frac{2\pi}{p}\cos^{n-4}\frac{2\pi}{p} - \ldots,\\
\sin\frac{2k\pi}{p} &= C_n^1 \sin\frac{2\pi}{p}\cos^{n-1}\frac{2\pi}{p} - C_n^3 \sin^3\frac{2\pi}{p}\cos^{n-3}\frac{2\pi}{p}\\
&\quad + C_n^5 \sin^5\frac{2\pi}{p}\cos^{n-5}\frac{2\pi}{p} - \ldots,
\end{aligned}$$

où $n = pm + k$.

SUR LES CERCLES INSCRITS A UN TRIANGLE;

PAR M. E. CESARO.

Soit, en coordonnées d'inertie, homogènes,

$$(1) \qquad \sum A_{ij}\xi_i\xi_j = 0$$

l'équation d'une conique, et représentons par B_{ij} le complément algébrique de A_{ij} dans le discriminant Δ de la forme (1). On fera $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = 1$, pour restituer à l'équation sa forme ordinaire. Pour que la droite

représentée par l'équation

$$\sum k_i \xi_i = 0$$

touche la conique, il faut que l'on ait

$$\sum B_{ij} k_i k_j = 0.$$

En particulier, le contact avec un côté du triangle fondamental est exprimé par l'équation précédente, en y supposant

$$k_1 = \frac{x_\nu}{a^2}, \qquad k_2 = \frac{y_\nu}{b^2}, \qquad k_3 = 4.$$

Il vient

$$B_{11} \frac{x_\nu^2}{a^4} + 2 B_{12} \frac{x_\nu y_\nu}{a^2 b^2} + B_{22} \frac{y_\nu^2}{b^4} + 8 B_{13} \frac{x_\nu}{a^2} + 8 B_{23} \frac{y_\nu}{b^2} + 16 B_{33} = 0.$$

Faisons $\nu = 1, 2, 3$, et additionnons les équations obtenues. Répétons ce calcul, après avoir multiplié l'équation précédente par x_ν, puis par y_ν. On parvient ainsi aux conditions

(2) $$\frac{B_{11}}{a^2} + \frac{B_{22}}{b^2} + 4 B_{33} = 0,$$

(3) $$\frac{B_{11}}{a^2} - \frac{B_{22}}{b^2} + \frac{8}{a^2 - b^2}(B_{13}\alpha + B_{23}\beta) = 0,$$

(4) $$B_{12} = \frac{4}{a^2 - b^2}(B_{23} a^2 \alpha - B_{13} b^2 \beta),$$

exprimant que la conique (1) est inscrite au triangle fondamental.

La condition (4) donne lieu à la remarque suivante. On sait que les coordonnées du centre de la conique sont données par les équations

$$B_{13} = B_{33} x_0, \qquad B_{23} = B_{33} y_0.$$

On a donc

$$B_{12} = \frac{4\,B_{33}}{a^2 - b^2}(a^2 \alpha y_0 - b^2 \beta x_0).$$

D'autre part,

$$A_{12}\Delta = \begin{vmatrix} B_{23} & B_{12} \\ B_{33} & B_{13} \end{vmatrix} = B_{33}^2\, x_0\, y_0 - B_{12}\, B_{33}$$

Conséquemment,

$$A_{12}\Delta = B_{33}^2\, \varphi(x_0, y_0),$$

pourvu que l'on pose

$$\varphi(x, y) = xy - \frac{4}{a^2 - b^2}(a^2 \alpha y - b^2 \beta x).$$

Lorsque A_{12} est nul, le centre est situé sur l'hyperbole $\varphi = 0$, et, par suite, son complémentaire barycentrique appartient à l'hyperbole de Kiepert. En d'autres termes, l'hyperbole de Kiepert est la figure complémentaire du lieu des centres des coniques inscrites, dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse de Steiner. En particulier, il est clair que les complémentaires des centres des quatre cercles inscrits sont situés sur l'hyperbole de Kiepert.

Lorsque l'équation (1) représente une circonférence, de rayon r, la condition (4) devient $\varphi(x_0, y_0) = 0$; elle exprime la propriété énoncée en dernier lieu. De même, les conditions (2) et (3) deviennent

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) r^2 - 4,$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{8}{a^2 - b^2}(\alpha x_0 + \beta y_0) = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) r^2;$$

d'où, par élimination de r, on déduit $\psi(x_0, y_0) = 0$, après avoir posé

$$\psi(x, y) = x^2 - y^2 + 4\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}(\alpha x + \beta y) + 2(a^2 - b^2).$$

Les centres des cercles inscrits au triangle fondamental sont donc à l'intersection des hyperboles équilatères φ et ψ. On remarquera que ces hyperboles ont leurs centres aux points de Steiner et de Tarry, respectivement, et que la première passe par le barycentre, par le symétrique de l'orthocentre relativement au centre du cercle circonscrit, par les symétriques des sommets du triangle, relativement aux milieux des côtés opposés, etc.

L'équation $\varphi = 0$ permet de poser

$$x = \frac{4a^2\alpha}{a^2+\lambda}, \qquad y = \frac{4b^2\beta}{b^2+\lambda}.$$

Par substitution dans ψ, on trouve que les valeurs de λ sont données par l'équation

$$\begin{aligned}\lambda^4 + 6(a^2+b^2)\lambda^3 + (9a^4 + 12a^2b^2 + 9b^4)\lambda^2 \\ + 2a^2b^2[7(a^2+b^2) + 4(\alpha^2+\beta^2)]\lambda + 9a^4b^4 = 0.\end{aligned}$$

Cela donne lieu à plusieurs remarques. Ainsi, en étendant les sommes aux abscisses et aux ordonnées des quatre centres, on trouve sans peine

$$\sum\frac{1}{x} = -\frac{a^2+3b^2}{2a^2\alpha},$$

$$\sum\frac{1}{y} = -\frac{3a^2+b^2}{2b^2\beta},$$

$$\sum\frac{1}{x^2} = \frac{(a^2+3b^2)(5a^2+3b^2)}{8a^4\alpha^2},$$

$$\sum\frac{1}{y^2} = \frac{(3a^2+b^2)(3a^2+5b^2)}{8b^4\beta^2},$$

$$\sum\frac{1}{xy} = \frac{(a^2-3b^2)(3a^2-b^2)}{4a^2b^2\alpha\beta},$$

. . . .

On en déduit que les sommes des inverses des distances d'un axe de l'ellipse de Steiner aux centres des cercles in-

scrits est égale à l'inverse de la distance de la même droite au milieu du segment de Brocard. La somme des carrés des mêmes inverses est égale au produit des inverses des distances de l'axe considéré au milieu du segment de Brocard et au centre d'homologie du triangle fondamental et du triangle formé par les milieux des côtés du triangle de Brocard. On verrait de même que le centre du cercle circonscrit est le centre des moyennes distances des centres des cercles inscrits, etc.

Revenons aux hyperboles φ et ψ, et remarquons que les coniques passant par les centres des cercles inscrits sont représentées par $\varphi + m\psi = 0$. Ce sont donc des hyperboles équilatères. On sait que le lieu des centres de ces coniques est représenté par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel, par l'équation

$$\left(x - \frac{4a^2\alpha}{a^2 - b^2}\right)\left(x + 2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\alpha\right) + \left(y + \frac{4b^2\beta}{a^2 - b^2}\right)\left(y - 2\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\beta\right) = 0.$$

qui représente la circonférence circonscrite. C'est un résultat évident, si l'on observe que cette dernière ligne joue le rôle de circonférence des neuf points dans le triangle formé par les centres de trois cercles inscrits quelconques, et que le centre du quatrième cercle est l'orthocentre du même triangle.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 1567;

Par M. Alexandre RENON,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

1° *Soient deux coniques* A *et* B *ayant respectivement pour foyers réels* a_1 *et* a_2, b_1 *et* b_2; *soit* C *une conique quelconque inscrite dans le quadrilatère circonscrit à* A *et* B; *les deux couples de droites joignant un foyer de* C *aux points* a_1 *et* a_2, b_1 *et* b_2 *ont les mêmes bissectrices.*

En effet, soit c un des foyers de C. Menons les bissectrices cx et cy du couple $c(a_1, a_2)$. On sait que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique A; d'ailleurs, elles sont conjuguées par rapport à C, puisque c est un foyer de cette conique.

Mais, le lieu des pôles de la droite cx par rapport aux coniques inscrites dans le quadrilatère considéré étant une droite, c'est la droite cy qui contient les pôles de cx par rapport à A et C. Le pôle de cx par rapport à B est donc sur cy. On verrait de même que le pôle de cy par rapport à B est sur cx; les deux droites cx et cy sont donc conjuguées par rapport à B et, par suite, sont bissectrices du couple $c(b_1, b_2)$.

2° *Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques ne change pas quand ces deux coniques varient, leurs foyers respectifs restant fixes.*

En effet, le lieu des foyers c coïncide avec le lieu des

points tels que les deux couples $c(a_1, a_2)$, $c(b_1, b_2)$ forment une involution, lieu qui ne dépend que de la position des points a_1, a_2, b_1, b_2.

Du reste, on sait que le lieu des foyers est une cubique passant par les points cycliques. Sept points suffisent à la déterminer. Or nous connaissons huit points du lieu qui sont les huit foyers réels ou imaginaires des deux coniques en question. Si ces points sont supposés fixes, le lieu ne change pas.

3° *Le lieu des ombilics de deux systèmes de coniques respectivement homofocales coïncide avec le lieu précédent.*

Effectivement, si l'on considère une conique de chaque système et les quatre tangentes communes à ces deux coniques, la droite qui joint deux ombilics non situés sur une même tangente peut être regardée comme une conique infiniment aplatie, tangente à ces quatre droites, et les ombilics sont précisément les foyers de ces coniques singulières.

On peut encore s'en rendre compte en remarquant que les tangentes menées d'un point à une conique forment un faisceau en involution avec les droites qui joignent ce point aux foyers; les deux couples de droites qui joignent l'ombilic aux quatre foyers réels des deux systèmes de coniques admettent alors les mêmes bissectrices que le couple formé par les tangentes communes issues de l'ombilic considéré.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Traité d'Arithmétique; par *J.-A. Serret.* 7e édition, revue et mise en harmonie avec les derniers programmes officiels, par MM. *J.-A. Serret* et *Ch. de Comberousse.* Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-8° de XII-336 pages. Prix : 4fr,50.

Traité de Trigonométrie; par *J.-A. Serret.* 7e édition, revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1888. In-8° de X-336 pages, avec figures dans le texte. Prix : 4fr.

Tables de Logarithmes a cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss, et de Diverses Tables usuelles; par *J. Hoüel.* Nouvelle édition, revue et augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1888. Grand in-8° de XLVIII-118 pages. Prix : 2fr.

Géodésie ou Traité de la figure de la Terre et de ses parties, comprenant la topographie, l'arpentage, le nivellement, la géomorphie terrestre et astronomique, la construction des cartes, la navigation; par *L.-B. Francœur.* 7e édition, augmentée de Notes sur la mesure des bases, par le lieutenant-colonel *Hossard*, et de deux Notes : l'une *Sur la méthode et les instruments d'observation employés dans les grandes opérations géodésiques ayant pour but la mesure des arcs de méridien et de parallèle terrestres;* l'autre *Sur la jonction géodésique et astronomique de l'Espagne et de l'Algérie;* par le colonel *Perrier,* membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, 1888. In-8° de XVI-564 pages, avec figures dans le texte et 11 planches. Prix : 12fr.

Les carrés magiques; par *Frolow.* Nouvelle étude suivie de Notes de *Delannoy* et *Ed. Lucas.* Paris, Gauthier-Villars, 1886. Grand in-8° de VI-48 pages, avec 7 planches de types de carrés magiques. Prix : 3fr.

Annuaire de l'observatoire météorologique de Montsouris pour l'an 1887. Météorologie, agriculture, hygiène. 16e année. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-18 de 300 pages, avec figures. Prix : 2fr.

Traité d'Analyse; par *H. Laurent.* T. II : Calcul différentiel. Applications géométriques. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-8° de 476 pages, avec figures dans le texte. Prix : 12fr.

Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par les *Secrétaires perpétuels.* T. VII : Théorie des probabilités. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In-4° de CLXXIV-645 pages. Prix : sur papier vergé, 35fr; sur papier de Hollande, 43fr.

LA STATIQUE GRAPHIQUE ET SES APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS; par *Maurice Lévy*, membre de l'Institut. 2e édition. IIIe Partie: Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupoles et corps de révolution. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Grand in-8° de IX-418 pages, avec figures dans le texte et un atlas de 8 planches. Prix : 17fr.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, à l'École normale et à l'Agrégation; par *J. Kœhler*, répétiteur à l'École Polytechnique. Questions et solutions. 2e Partie. Paris, Gauthier-Villars, 1888. In-8° de 372 pages, avec figures dans le texte. Prix : 9fr.

HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES; par *M. Marie*. T. XII et dernier. 16e période : d'Arago à Abel et aux géomètres contemporains. Paris, Gauthier-Villars, 1888. Petit in-8° de 258 pages. Prix : 6fr.

LES INTÉGRAPHES. LA COURBE INTÉGRALE ET SES APPLICATIONS. Étude sur un nouveau système d'intégration mécanique; par *Br. Abdand-Abakanowicz*. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In-8° raisin de X-156 pages, avec 94 figures dans le texte. Prix : 5fr.

SUR L'EMPLOI DE L'ÉLECTRICITÉ POUR LA TRANSMISSION DU TRAVAIL A DISTANCE; par *J. Boulanger*, capitaine du génie. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-8° de VI-136 pages, avec figures dans le texte. Prix : 2fr,75.

NOTIONS COMPLÉMENTAIRES DE MATHÉMATIQUES. Géométrie analytique. Dérivées, Premiers principes de Calcul différentiel et intégral; rédigées conformément aux nouveaux programmes des cours des Écoles nationales d'Arts et Métiers; par *A. Deligne*, Directeur de l'École des Arts et Métiers d'Aix. Paris, Gauthier-Villars, 1887. 2 vol. in-8° de XII-240 et 276 pages. Prix : 14fr.

SUR LES TEMPÊTES. Théorie et discussions nouvelles; par *H. Faye*, membre de l'Institut. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Grand in-8° de 76 pages, avec figures. Prix : 2fr,50.

COURS D'ANALYSE INFINITÉSIMALE; par *Ph. Gilbert*, professeur à l'Université catholique de Louvain. Partie élémentaire. 3e édition. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Grand in-8° de VI-552 pages, avec figures dans le texte. Prix : 11fr.

LES MOUVEMENTS GÉNÉRAUX DE L'ATMOSPHÈRE (d'après les Mémoires américains de W. Ferrel); par *J.-R. Plumandon*, météorologiste adjoint à l'observatoire du Puy-de-Dôme. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-18 jésus, avec figures. Prix : 1fr.

LES COURANTS DE L'OCÉAN (d'après les Mémoires américains de W. Ferrel); par *J.-R. Plumandon*, météorologiste adjoint à l'observatoire du Puy-de-Dôme. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-18 jésus, avec une carte en deux couleurs. Prix : 1fr.

LA PHOTOGRAPHIE ASTRONOMIQUE A L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET LA CARTE DU CIEL; par M. l'amiral *Mouchez*, Directeur de l'Observatoire. Paris, Gauthier-Villars, 1887. In-18 jésus, avec figures dans le

texte et 7 planches hors texte (photographie, héliogravure, photoglyptie). Prix : $3^{fr},50$.

Cours d'Analyse de l'École Polytechnique; par *Ch. Sturm*, revu et corrigé par *E. Prouhet* et augmenté de la Théorie élémentaire des fonctions elliptiques; par *H. Laurent*. 8e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la licence; par *A. de Saint-Germain*, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. Paris, Gauthier-Villars, 1887. 2 vol. in-8° de xxx-550 et 650 pages, avec figures dans le texte. Prix : 14^{fr}.

Application nautique de la nouvelle théorie des marées; par *Hoëné Wronski*. Œuvre posthume, propriété de M. le comte *Ladislas Zamoyski de Kornick*. Paris, Gauthier-Villars, 1886. Grand in-4° de viii-96 pages. Prix : 10^{fr}.

Problèmes de Physique et de Chimie choisis parmi les sujets de composition proposés dans les concours et par les diverses Facultés dans ces dernières années; par *L. Jays*. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In-8° de viii-336 pages, avec figures. Prix : 6^{fr}.

Traité élémentaire des mesures absolues, mécaniques, électrostatiques et électromagnétiques, avec applications à de nombreux problèmes; par *Alexandre Serpieri*. Traduit de l'italien et annoté par *Paul Marcillac*. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In-8° de x-116 pages. Prix : $3^{fr},50$.

Traité de Géométrie descriptive, ligne droite et plan, polyèdres, surfaces; texte et dessins par *Jules Pillet*, professeur à l'École des Beaux-Arts. Paris, Ch. Delagrave, 1887. Grand in-4° de 275 pages avec 557 figures. Prix : 12^{fr}.

Cours élémentaire de lavis; par *J. Pillet*, professeur à l'École des Beaux-Arts. 2e édition, revue et considérablement augmentée. Paris, Ch. Delagrave, 1886. In 8° de xii-136 pages, avec 96 figures dans le texte. Prix : $2^{fr},50$.

Instructions et conseils sur l'exécution des épures et sur le lavis; par *J. Pillet*. Paris, Nony et Cie, 1888. Petit in-8° de 36 pages, avec 28 figures. Prix 1^{fr}.

Elementos de calculo de los cuaterniones y sus aplicaciones principales a la Geometria, al Analisis y a la Mecanica; por *Valentin Balbin*, catedratico di Matematicas superiores en la Universidad nacional de Buenos-Ayres. Buenos-Ayres, M. Biedma, 1887. Grand in-8° de xx-360 pages, avec figures dans le texte.

Curso de analyse infinitesimal; por *F. Gomes Teixeira*, director da Academia polytechnica do Porto. Calculo differencial. Porto, typographia occidental, 1887. Grand in-8° de 372 pages.

Semelhança e rectificaçao dos arcos ellipticos; por *Rodolpho Guimaraes*, aspirante do exercito. Porto, typographia occidental, 1887. Grand in-8° de xii-80 pages.

Théorie des quantités complexes a n unités principales; par

l'abbé *B. Berloty*. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1886. In-4° de 126 pages.

Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes; par *V. Jamet,* docteur ès sciences, professeur au lycée de Nantes. Paris, Nony et Cie, 1888. In-8° de 16 pages.

La solution du problème des températures; par *Félix Lucas,* ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Grand in-8° de 16 pages.

TIRAGES A PART.

Recherches sur la structure des corps cristallisés doués du pouvoir rotatoire; par M. G. Wyrouboff. Extrait des *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. VIII, 1886.

Relations réciproques des grands agents de la nature, d'après les travaux récents de Hirn et Clausius; par H.-J. Klein. Traduit de *Gaea, Natur und Leben*, xxiie année; par *Em. Schwœrer,* 1886.

Note sur les expressions obtenues par Duhamel et Lamé pour le flux de chaleur dans les solides non isotropes; par M. Carvallo. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, 1887.

Mémoire sur la théorie algébrique des équations; par M. A.-E. Pellet. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*. T. XV, 1887.

Une conique remarquable du plan d'un triangle; les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites; par M. G. de Longchamps. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences*, 1886.

Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioïde; par M. G. de Longchamps. Extrait de *Zvlastni otisk z Vestnika kralovske ceske spolecnosti nauk*, 1887.

Sur la rectification de quelques courbes remarquables; Sur une trisectrice remarquable; par M. G. de Longchamps. Extraits de *Mathesis,* t. VII et VIII, 1887 et 1888.

Intorno ad una ricerca di limiti; Sull' uso dell' integrazione in alcune questioni d'aritmetica; Intorno ad una questione di probabilita; Sul moto d'un punto sollecitato verso una retta; par M. E. Cesaro. Extraits des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. I, 1887.

Emprego da cycloide para a resoluçao graphica de alguns problemas de geometria; Sobre un theorema relativo à comparaçao de arcos de ellipse; por Rodolpho Guimaraes. Extraits du *Jornal de Sciencias math. e astr.*, 1887.

Sobre a rectificaçao dos arcos da ellipse; por Rodolpho Guimaraes. Extrait du *Jornal de Sciencias math., phys. e naturaes,* 1887.

Formulas geraes para calcular a area lateral do tronco de cone circular recto; Sobre ao formulas relativas as calculo da superficie convexa do tronco de cone de revoluçao; por RODOLPHO GUIMARAES. Extraits de *Instituto*, 1886 et 1887.

Sur les points complémentaires; par M. EM. VIGARIÉ. Extrait de *Mathesis*, t. VII, 1887.

Sur les polygones et les polyèdres harmoniques; par MM. G. TARRY et J. NEUBERG. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1886.

Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées; par M. G. TARRY. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences*, 1886.

Sui poligoni piani semplici; dell Dott. LUIGI CERTO. Extrait de *Giornale di Matematiche*, t. XXIII, 1886.

Sulle forme di terzo grado generate da due forme elementari projettive di primo e di secondo grado di un piano o di una stella; Sull' n-agono inscritto isoclino in un n-agono piano semplice dato; dell Dott. LUIGI CERTO. Extrait de *Annuario del R. Istituto tecnico di Bari*, 1885 et 1886.

Zum Normalenproblem der Ellipse; von CARL PELZ. Extrait des *Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch. zu Wien*, 1887.

Sur les intégrales algébriques des différentielles algébriques; par G. HUMBERT. Extrait des *Acta mathematica*, t. X, 1887.

Démonstration simplifiée des formules de Fourier; Sur les produits composés d'un grand nombre de facteurs et le reste de la série de Binet; par PH. GILBERT. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1884 et 1886.

Sur quelques théorèmes de Sluse; par M. PH. GILBERT. Extrait de *Mathesis*, t. 1886.

Sur la théorie de M. Helmholtz relative à la conservation de la chaleur solaire; Sur les accélérations des points d'un système invariable en mouvement; par M. PH. GILBERT. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1885 et 1887.

Sur quelques conséquences de la formule de Green et sur la théorie du potentiel; par M. PH. GILBERT. Extrait du *Journal de Math. pures et appliquées*. 3e série, t. X, 1884.

Sur une classe de nombres remarquables; par M. D'OCAGNE. Extrait de *American Journal of Math.*, t. IX.

Sur la relation entre les rayons de courbure de deux courbes polaires réciproques; par M. D'OCAGNE. Extrait des *Annales de l'École normale*, 1886.

Sur les courbes algébriques de degré quelconque; par M. D'OCAGNE. Extrait du *Journal de Math. spéciales*, 1887.

Sur une propriéte de la sphère et son extension aux surfaces quelconques; par M. D'OCAGNE. Extrait des *Proceedings of the London math. Society*, vol. XVIII, 1887.

Les coordonnées cycliques; *Quelques propriétés du triangle;* par M. D'OCAGNE. Extrait de *Mathesis*, 1887.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1573. D'un point M du plan d'une ellipse, on mène à cette courbe les quatre normales MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 et les deux tangentes MT_1 et MT_2; trouver le lieu du point tel que l'expression

$$\frac{MN_1 . MN_2 . MN_3 . MN_4}{MT_1 . MT_2}$$

ait une valeur constante donnée l^2. (BARISIEN.)

1574. On considère tous les points du plan d'une ellipse d'où l'on peut mener à cette courbe deux normales simples et une normale double, et l'on demande le lieu du pôle de la corde qui joint le pied de la normale double au pied d'une normale simple. (CHAMBON.)

1575. Les côtés d'un triangle PQR inscrit à une parabole rencontrent l'axe AS aux points L, M, N, et l'on prend sur AS des points L', M', N', tels que

$$AL.AL' = AM.AM' = AN.AN' = -AS^2,$$

A étant le sommet, S le foyer; démontrer, par la Géométrie pure, que les droites PL', QM', RN' se rencontrent sur la courbe. (R.-W. GENÈSE.)

1576. Les coefficients de l'équation

$$x^5 + \tfrac{5}{2}(a+b)x^4 + 10p_2x^3 + 10p_3x^2 + 5p_4x + p_5 = 0$$

sont liés par la relation

$$(10-r)p_r = \tfrac{1}{2}(11-2r)(a+b)p_{r-1} + (r-1)ab\,p_{r-2},$$

où l'on suppose $p_0 = 1$ et $a > b$. Montrer que toutes les racines sont réelles et comprises entre $-a$ et $-b$. (D. Ewardes.)

1577. Soit, pour n infini,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda,$$

dans une série à termes positifs. Démontrer que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}}} = \sqrt{\lambda}.$$

(E. Cesaro.)

1578. Si $\lim n^x a_n = a$, pour n infini, on a

$$\lim n^x \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = a e^x.$$

(E. Cesaro.)

1579. Si les nombres positifs a_1, a_2, a_3, ... sont tels que l'on ait $\lim(a_n - n) = a$ pour n infini, on aura également

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{a_1 a_2^{\frac{2}{2}} a_3^{\frac{3}{3}} \ldots a_n^{\frac{n}{n}}} = e^a.$$

(E. Cesaro.)

1580. Si, dans la question précédente, on fait

$$b_n = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n),$$

on a

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n^2}\right)^{\frac{n}{4}} \sqrt[n]{b_1 b_2^{\frac{2}{2}} b_3^{\frac{3}{3}} \ldots b_n^{\frac{n}{n}}} = e^{2a+1}.$$

(E. Cesaro.)

SUR LES POLES PRINCIPAUX D'INVERSION DE LA CYCLIDE DE DUPIN;

PAR M. G. FOURET.

1. J'ai démontré, il y a quelques années [1], d'une manière fort simple, qu'il n'existe, à l'exception du cercle et de la sphère, aucune courbe plane se transformant en elle-même par inversion, à l'aide d'une infinité de pôles formant un lieu géométrique, aucune surface se reproduisant par inversion, au moyen d'une infinité de pôles coïncidant avec tous les points d'une surface. Je faisais remarquer, en terminant, qu'il existe des surfaces ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points d'une ligne; et, après avoir cité, comme exemple, le *tore* qui a pour pôles principaux d'inversion tous les points de son axe, ce qui est exact et suffisait à justifier mon assertion, j'ajoutais, comme second exemple, la *cyclide de Dupin*, à laquelle une erreur de mémoire me faisait attribuer comme pôles principaux tous les points d'une circonférence.

Mon attention a été récemment appelée sur cette affirmation inexacte par un jeune géomètre distingué, M. Hadamard, qui, en reprenant l'étude de la question dont je m'étais occupé, est parvenu à démontrer que *le seul lieu géométrique de pôles principaux d'inversion que puisse admettre une surface est une droite ou un système de droites en nombre limité* [2].

(1) *Nouvelles Annales*, 3e série, t. II, p. 259.

(2) Le travail de M. Hadamard doit paraître prochainement dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (numéro de mai 1888).

2. Il est facile de voir que la cyclide de Dupin admet, comme pôles principaux d'inversion, tous les points d'un système de deux droites de directions rectangulaires. On le démontre, en s'appuyant sur la propriété dont jouit la cyclide d'être la transformée par inversion d'un tore, et même d'une infinité de tores, comme l'a montré autrefois M. Mannheim, dans une étude géométrique très intéressante [1].

Considérons à cet effet une cyclide, et l'un des tores dont elle est la transformée par inversion. Ce tore est l'enveloppe d'une série de sphères (S) ayant toutes leur centre sur l'axe de révolution O de cette surface. Dans la transformation, les sphères (S) se changent en sphères (S′), enveloppant la cyclide et coupant orthogonalement un même cercle O′, transformé de l'axe O du tore. Les sphères (S′) ont donc, comme axe radical commun, la perpendiculaire D au plan du cercle O′ menée par son centre. Un point quelconque de cette droite a, par suite, la même puissance par rapport à toutes les sphères (S′), et aussi par rapport aux cercles de contact de ces sphères avec la cyclide, dont les plans, on le voit immédiatement, passent tous par la droite D. Un point quelconque de cette droite est donc bien un pôle principal d'inversion de la cyclide.

Le tore peut encore être considéré comme l'enveloppe d'une série de sphères (Σ) ayant pour grands cercles ses cercles méridiens. Ces sphères, orthogonales à un même cercle Ω, situé dans le plan de l'équateur du tore, se changent, par inversion, en d'autres sphères (Σ′), qui enveloppent la cyclide et sont orthogonales à un même cercle Ω′, inverse de Ω. On conclut de là, comme tout à

---

(1) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XIX.

l'heure, que l'axe Δ de ce cercle est un lieu de pôles principaux d'inversion pour la cyclide.

3. Il est clair d'ailleurs que la cyclide n'a pas de pôle principal d'inversion en dehors des droites D et Δ ; car tout pôle principal de la cyclide doit provenir d'un des pôles ou plans principaux du tore, et ceux-ci, comme on vient de le voir, fournissent uniquement les pôles de la cyclide situés sur D et Δ.

Pour voir que les droites D et Δ sont rectangulaires, il suffit de remarquer : 1° que le plan équatorial commun des sphères (S′), c'est-à-dire le plan du cercle O′, coïncide avec le plan méridien du tore qui passe par le pôle de transformation ; 2° que le plan équatorial commun des sphères (Σ′), c'est-à-dire le plan du cercle Ω′, est perpendiculaire à ce même plan méridien, de même que le plan du cercle inverse Ω. Par suite, les droites D et Δ, respectivement perpendiculaires à deux plans rectangulaires, ont elles-mêmes des directions rectangulaires. Ces droites jouissent, par rapport à la cyclide, de plusieurs autres propriétés intéressantes qui sont exposées dans la Note de M. Mannheim déjà citée.

4. On peut encore déduire d'un théorème dû à M. Mannheim [1] que *la cyclide de Dupin est la seule surface ayant pour pôles principaux d'inversion tous les points de deux droites.*

Ce théorème est le suivant :

Lorsqu'une surface a une infinité de pôles principaux en ligne droite, on peut la transformer d'une infinité de manières en surfaces de révolution ; les pôles

---

[1] *Bulletin de la Société Philomathique*, p. 106, année 1860.

de transformation, satisfaisant à cette condition, sont sur une circonférence située dans le plan principal que possède nécessairement la surface.

Imaginons une surface ayant pour pôles principaux tous les points de deux droites D et Δ. D'après le théorème précédent, nous pouvons transformer cette surface en une surface de révolution, en prenant le pôle d'inversion sur une certaine circonférence dont le plan est perpendiculaire à D. Aux pôles principaux de la surface primitive situés sur Δ correspondent des pôles principaux de la nouvelle surface situés sur une droite Δ', qui, par raison de symétrie, coïncide nécessairement avec l'axe de révolution de cette surface. La méridienne de cette surface, possédant une infinité de pôles principaux d'inversion en ligne droite, ne peut se composer que de cercles. La surface résultant de la transformation est donc un tore, et l'on en conclut que la surface primitive est une cyclide de Dupin.

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION;

Par M. H. LAURENT.

La méthode d'élimination que j'ai donnée dans ce Recueil se prête à un grand nombre d'applications et de transformations.

Considérons les deux équations algébriques

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0,$$

des degrés m et n respectivement ($m \geq n$); pour éliminer x entre ces deux équations, on divise $\varphi(x)$, $x\varphi(x)$, ...,

$x^{n-1}\varphi(x)$ par $\psi(x)$ et l'on égale à zéro le déterminant des coefficients des restes de ces divisions.

Pour appliquer cette règle, cherchons les restes en question ; à cet effet, désignons-les par φ_0, φ_1, φ_2, ... ; nous aurons

$$x^i\varphi(x) = Q\psi(x) + \varphi_i(x),$$

Q désignant un polynôme entier. Soit a une racine de $\psi(x) = 0$, on aura

$$\varphi_i(a) = a^i\varphi(a);$$

$\varphi_i(x)$, étant connu pour plus de $n-1$ valeurs de x, sera fourni par la formule d'interpolation de Lagrange, et l'on aura

$$(2) \qquad \varphi_i(x) = \sum \frac{a^i\varphi(a)}{x-a}\,\frac{\psi(x)}{\psi'(a)}.$$

Divisons $\psi(x)$ par $x-a$; si l'on a

$$\psi(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n,$$

on aura

$$\frac{\psi(x)}{x-a} = A_0x^{n-1} + (A_0a + A_1)x^{n-2}$$
$$+ (A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{n-3} + \ldots,$$

et la formule (2) donnera

$$\varphi_i(x) = \sum \frac{a_i\varphi(a)}{\psi'(a)}\left[A_0x^{n-1} + (A_0a + A_1)x^{n-2} + \ldots\right],$$

en sorte que la résultante des équations (1) se mettra sous la forme suivante, en désignant par ϖ la quantité $\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$,

$$\begin{vmatrix} A_0\Sigma\varpi & A_0\Sigma a\varpi + A_1\Sigma\varpi & A_0\Sigma a^2\varpi + A_1\Sigma a\varpi + A_2\Sigma\varpi & \ldots \\ A_0\Sigma a\varpi & A_0\Sigma a^2\varpi + A_1\Sigma a\varpi & A_0\Sigma a^3\varpi + A_1\Sigma a^2\varpi + A_2\Sigma a\varpi & \ldots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

En combinant convenablement les colonnes de ce dé-

terminant, on finit par mettre la résultante sous la forme

$$\begin{vmatrix} A_0 \Sigma \varpi & A_0 \Sigma a\varpi & \ldots \\ A_0 \Sigma a\varpi & A_0 \Sigma a^2\varpi & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \sum \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \sum a\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \ldots & \sum a^{n-1}\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \\ \sum a\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \sum a^2\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} & \ldots & \sum a^n\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Si, en particulier, on suppose $\varphi(x) = \psi'(x)$, on retrouve la formule connue qui exprime que $\psi(x) = 0$ a une racine multiple

$$\begin{vmatrix} \Sigma a^0 & \Sigma a^1 & \ldots & \Sigma a^{n-1} \\ \Sigma a^1 & \Sigma a^2 & \ldots & \Sigma a^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

La formule (3) montre que le premier membre de la résultante peut se mettre sous la forme d'un discriminant de polynôme homogène du second degré égalé à zéro.

Les éléments du déterminant (3) sont des fonctions symétriques que l'on sait calculer et que l'on obtient, comme on sait, à l'aide d'une seule division. Représentons, avec Cauchy, par le symbole

$$\mathcal{E}\, F(z)$$

le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $F(z)$ ordonné suivant les puissances entières croissantes de z, la formule (3) pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} \mathcal{E}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^2\varphi(z)}{\psi(z)} & \ldots \\ \mathcal{E}\frac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^2\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{E}\frac{z^3\varphi(z)}{\psi(z)} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

et même, si l'on veut,

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{L}\dfrac{z'\varphi(z')}{\psi(z')} & \mathcal{L}\dfrac{z''^2\varphi(z'')}{\psi(z'')} & \cdots \\ \mathcal{L}\dfrac{z\varphi(z)}{\psi(z)} & \mathcal{L}\dfrac{z'^2\varphi(z')}{\psi(z')} & \mathcal{L}\dfrac{z''^3\varphi(z'')}{\psi(z'')} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{L}\cdots\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\frac{\varphi(z')}{\psi(z')}\frac{\varphi(z'')}{\psi(z'')}\cdots\Delta = 0,$$

Δ désignant le déterminant $\Sigma \pm z^0 z' z''^2 \ldots$ qui est le produit des différences que l'on peut former avec les quantités z, z', z'', ..., d'où le théorème suivant :

Le premier membre de la résultante des équations (1) *est le coefficient de* $\frac{1}{z}\frac{1}{z'}\frac{1}{z''}\cdots$ *dans le développement du produit*

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\frac{\varphi(z')}{\psi(z')}\frac{\varphi(z'')}{\psi(z'')}\cdots\Delta.$$

Ce théorème permet de mettre le premier membre de la résultante sous la forme d'une intégrale multiple.

Nous n'insistons pas sur ce point qui n'est que curieux, mais nous ferons observer qu'il permet de faire intervenir dans les calculs la résultante de deux équations quelconques sans avoir besoin de la calculer effectivement, absolument comme la théorie des déterminants permet de faire intervenir, sans avoir besoin de la trouver, la résultante de plusieurs équations du premier degré.

LA SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ [1];

Par M. Fritz HOFMANN.

Étant donnée une équation générale du quatrième degré

$$(\mathrm{A}) \qquad a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4 = 0,$$

on peut faire la substitution $z = \frac{x}{y}$, ce qui donne

$$(\mathrm{B}) \quad a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 4 a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^3 + 6 a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4 a_3 \frac{x}{y} + a_4 = 0.$$

L'équation (B) représente l'ensemble de quatre droites menées par l'origine : $\frac{x}{y} = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_3$; si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont les racines de l'équation (A).

Le faisceau (B) coupe en quatre points distincts la parabole

$$(\mathrm{C}) \qquad y^2 - x = 0,$$

menée par l'origine (abstraction faite du point commun situé dans l'origine même, nous l'excluons comme non essentiel pour notre problème).

On peut chercher l'équation d'une section conique D qui passe par les quatre points mentionnés, c'est-à-dire, les quatre points d'intersection *essentiels* de B et C. Cette équation D contiendra une constante arbitraire,

---

(1) Sur les méthodes employées dans les lignes suivantes, comparer Salmon, *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, art. 209 (17)

puisque la section conique D n'est pas encore déterminée par quatre points. La forme de l'équation D une fois trouvée, on pourra interpréter la solution de l'équation (A) ou (B) comme la détermination des quatre points d'intersection des deux sections coniques C et D, et nous verrons que c'est justement la *mobilité* de la section conique D qui facilite la détermination de ces quatre points communs.

En employant encore les lettres λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 pour désigner les racines encore inconnues de l'équation (A), on peut d'abord donner une liste de ces quatre points d'intersection de B et C.

De $\frac{x}{y} = \lambda_1$ on tire $x = \lambda_1 y$ et, en substituant dans C,

$$y^2 - \lambda_1 y = 0.$$

En supprimant la racine $y = 0$ (qui nous ramènerait à l'origine), nous avons $y = \lambda_1$, ce qui donne $x = \lambda_1^2$. Donc le point ($x = \lambda_1^2$, $y = \lambda_1$) est situé en même temps sur la droite menée par l'origine $\frac{x}{y} = \lambda_1$ et sur la parabole

$$\text{(C)} \qquad y^2 - x = 0.$$

On a donc, pour coordonnées des quatre points d'intersection du faisceau (B) et de la section conique (C),

$$x = \lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \lambda_3^2,\ \lambda_4^2,$$
$$y = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4;$$

il s'agit maintenant de former l'équation (D) d'une section conique, mobile en quelque sorte, qui passe par les quatre points énumérés.

En supposant l'équation (D) de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

les six coefficients doivent satisfaire à quatre conditions, que l'on formera en introduisant dans cette équation les quatre couples λ_i^2, λ_i formés au moyen des quatre racines λ_i.

Il faut donc qu'on ait ($x = \lambda_i^2$, $y = \lambda_i$)

$$(\Delta) \qquad A\lambda_i^4 + B\lambda_i^3 + (C + D)\lambda_i^2 + E\lambda_i + F = 0$$

($i = 1, 2, 3, 4$), où λ_1 λ_2, λ_3, λ_4 *sont les racines de l'équation* (A) *ou* (B). Mais, puisque

$$(B) \qquad a_0\lambda_i^4 + 4a_1\lambda_i^3 + 6a_2\lambda_i^2 + 4a_3\lambda_i + a_4 = 0$$

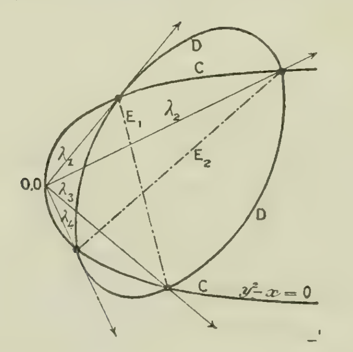
($i = 1, 2, 3, 4$) est une identité, l'équation Δ est satisfaite identiquement en posant

$$A = a_0, \qquad B = 4a_1, \qquad C + D = 6a_2, \qquad E = 4a_3, \qquad F = a_4,$$

et l'équation cherchée est de la forme

$$(D) \quad a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2 + (6a_2 - \mu)x + 4a_3y + a_4 = 0.$$

C'est là la section conique D qui passe par les quatre points d'intersection du faisceau B et de la parabole C (voir la figure).



Nous donnons une vérification *a posteriori* des propriétés de la section conique D.

En supposant données les équations $D = 0$, $C = 0$, on

peut en déduire directement une équation qui existe entre les quatre rapports $\frac{x}{y}$, pris relativement aux quatre points d'intersection des deux sections coniques C et D ; car, si x, y est un point commun à C et D, on a le système

$$\begin{aligned}
0 &= y^2.1 - x.1 + 0.1,\\
0 &= 0.1 + y^2.1 - x.1,\\
0 &= (a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2).1\\
&\qquad + [(6a_2 - \mu)x + 4a_3y].1 + a_4.1,
\end{aligned}$$

et, en éliminant la valeur 1, on voit que

$$0 = \begin{vmatrix} y^2 & -x & 0 \\ 0 & y^2 & -x \\ a_0x^2 + 4a_1xy + \mu y^2 & (6a_2 - \mu)x + 4a_3y & a_4 \end{vmatrix}.$$

On trouve comme résultat

$$\begin{aligned}
a_4y^4 + a_0x^4 + 4a_1x^3y + \mu x^2y^2\\
+ (6a_2 - \mu)x^2y^2 + 4a_2y^3x = 0,
\end{aligned}$$

condition qui est remplie par les quatre directions $\frac{x}{y}$ des droites menées par l'origine aux quatre points d'intersection de C et D. On voit que c'est bien encore l'équation (B) de laquelle nous sommes partis.

Après nous être assurés que la section conique D passe par les points d'intersection du faisceau B et de la parabole C, nous voyons que notre problème, la solution de l'équation (A) ou (B), est ramené à la détermination des quatre points d'intersection de C et D.

Quant à l'équation (D) elle-même, on peut la mettre sous la forme

$$(a_0x^2 + 4a_1xy + 6a_2x + 4a_3y + a_4) + \mu(y^2 - x) = 0,$$

où l'on voit distinctement que la forme de la section

conique D se modifie selon les valeurs arbitraires que l'on attribuera à la constante μ.

C'est ici le point qui met en évidence le but et les avantages de notre procédé géométrique : la transformation de notre équation proposée (A) en un problème de Géométrie du même degré de complication ne constituerait pas encore un progrès essentiel quant à la solution effective de l'équation; c'est seulement la présence de la constante μ qui nous fournit le moyen de *simplifier* la configuration géométrique.

On sait que le *discriminant* d'une section conique décide la question si son équation est séparable en deux facteurs linéaires ou non ; or, le discriminant de la section conique D contiendra toujours la constante μ, et, en choisissant la valeur de μ telle que le discriminant s'évanouisse, la section conique D dégénère en *un couple de droites*. La détermination du centre, du point commun, de ce couple est un problème du premier degré ; la séparation des deux droites E_1, E_2 qui composent la section conique dégénérée est un problème du deuxième degré. En faisant couper par chacune des deux droites E_1, E_2 la parabole

(C) $$y^2 - x = 0,$$

il reste encore deux fois une équation du deuxième degré à résoudre qui, finalement, nous fournit les coordonnées x, y des deux points d'intersection avec la parabole, relatifs à chacune des droites E_1 et E_2 mentionnées.

Ajoutons que l'application exacte des résultats géométriques énoncés dans les dernières lignes serait encore un petit détour, puisque, pour notre problème, il ne s'agit pas de l'évaluation des points d'intersection de D et C, mais seulement de la détermination des quatre

directions $\frac{x}{y}$; nous préférerons donc employer l'équation quadratique qui existe pour $\frac{x}{y}$, quand une section conique

$$(C) \qquad y^2 - x = 0$$

et une droite

$$(E) \qquad ax + by + c = 0$$

se coupent en un point (x, y) : de

$$(ax + by) + c.1 = 0.$$
$$y^2 - x.1 = 0$$

on conclut, par l'élimination de 1,

$$\begin{vmatrix} ax + by & c \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Comme résultat final, nous avons à résoudre géométriquement l'équation (A); nous voyons d'abord encore une fois que cette solution dépend d'une équation du troisième degré, ce qui est connu pour toutes les méthodes algébriques.

Cette équation du troisième degré (le discriminant d'une section conique) fournit par ses trois racines μ les trois points d'intersection des trois couples de droites qu'on peut mener par quatre points, inconnus séparément, mais qui sont définis comme points communs à deux sections coniques données.

L'équation du troisième degré résolue, il reste encore la solution de deux équations du deuxième degré pour donner les racines $\frac{x}{y}$ de l'équation (B) ou les z de l'équation (A) en forme ou valeur définitive.

Table des procédés géométriques à suivre pour la solution d'une équation du quatrième degré.

I. Former l'équation de la section conique

$$D = (a_0 x^2 + 4 a_1 xy + 6 a_2 x + 4 a_3 y + a_4) + \mu (y^2 - x).$$

II. Former le discriminant de D, savoir

$$\text{(F)} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & \left(3a_2 - \frac{\mu}{2}\right) \\ 2a_1 & \mu & 2a_3 \\ \left(3a_2 - \frac{\mu}{2}\right) & 2a_3 & a_3 \end{vmatrix},$$

l'égaler à zéro, trouver *une* racine μ_1 de l'équation $F = 0$.

III. Former

$$D_1 = (a_0 x^2 + 4 a_1 xy + 6 a_2 x + 4 a_3 y + a_4) + \mu_1 (y^2 - x),$$

à l'aide de cette valeur déterminée μ_1 de μ.

La section conique D dégénère en un couple de droites, d'après la théorie des discriminants.

IV. Séparer les deux facteurs linéaires

$$E_1 = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$E_2 = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

dont D_1 se compose, par la solution d'une équation quadratique.

V. Les valeurs de $\frac{x}{y}$ tirées des deux équations

$$a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2 = 0,$$
$$a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = 0$$

sont les racines de l'équation proposée.

Exemple I. — Soit proposée l'équation

(A) $$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0,$$

où

$$a_0 = 1, \quad 4a_1 = -4, \quad 6a_2 = -1, \quad 4a_3 = 16, \quad a_4 = -12.$$

La section conique D est donnée par

(D) $$x^2 - 4xy - x + 16y - 12 + \mu(y^2 - x) = 0.$$

Elle doit passer par les points d'intersection du faisceau

(B) $$\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 - \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16\left(\frac{x}{y}\right) - 12 = 0,$$

avec la parabole

(C) $$y^2 - x = 0.$$

Vérifions : soit x, y un point commun à C et D; nous pouvons établir directement une équation pour le rapport $\frac{x}{y}$ de la manière suivante : mettons $\mu = 0$ dans l'expression de D, les points d'intersection avec C resteront les mêmes; c'est-à-dire qu'on a, pour notre x et y,

$$(x^2 - 4xy).1 + (-x + 16y).1 - 12.2 = 0,$$
$$y^2.1 - x.1 + 0.1 = 0,$$
$$0.1 + y^2.1 - x = 0.$$

En éliminant 1, on trouve

$$\begin{vmatrix} x^2 - 4xy & -x + 16y & -12 \\ y^2 & -x & 0 \\ 0 & y^2 & -x \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$x^4 - 4x^3y - x^2y^2 + 16xy^3 - 12y^4,$$

ce qui s'accorde identiquement avec B.

Formons le discriminant F :

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right) \\ -2 & \mu & 8 \\ \left(-\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\right) & 8 & -12 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui nous donne une équation du troisième degré pour μ.

Elle a trois racines $\mu = 0, 3, -5$; la connaissance d'une seule nous suffirait pour donner une solution complète. Les substitutions $\mu = 0, 3, -5$ dans la forme de D feront dégénérer D trois fois en un couple de droites :

$\mu = 0$ change D en $(4y - x - 3)(-x + 4)$,
$\mu = 3$ » $(-x + 3y + 2)(-x + y + 6)$,
$\mu = -5$ » $(x + y - 2)(x - 5y + 6)$.

Pour déduire [1] une de ces formules, prenons $\mu = -5$. D se change en

$$(D_1) \qquad x^2 - 4xy - 5y^2 + 16y + 4x - 12 = 0;$$

il s'agit d'opérer la séparation des deux droites représentées par D_1.

Le centre x', y' du couple D est défini comme satisfaisant aux trois équations du discriminant F :

$$\begin{aligned} x' - 2y' + 2 &= 0, \\ -2x' - 5y' + 8 &= 0, \\ x' + 8y' - 12 &= 0. \end{aligned}$$

On voit que c'est le point $x' = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$.

---

(1) Pour une méthode très générale de séparer les droites d'un couple, *voir* Clebsch-Lindemann, *Leçons de Géométrie*, traduites par A. Benoist, Chap. II, n° 3 : *Sur les couples de droites*.

En mettant $x = 0$ dans $D_1 = 0$, on voit paraître les deux points d'intersection du couple $D_1 = 0$ avec l'axe $x = 0$. L'équation du deuxième degré ($D_1 = 0$, $x = 0$),

$$(D'_1) \qquad -5y^2 + 16y - 12 = 0,$$

a pour racines $x = 0$, $y = 2$, $y = \frac{6}{5}$.

Ainsi nous avons les moyens de former effectivement les deux équations (E_1) et (E_2) qui composent D_1. La droite E_1 joindra le centre $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ au point 0, 2; son équation est

$$(E_1) \qquad x + y - 2 = 0;$$

la droite E_2 joindra le même point $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ à l'autre point sur l'axe des y : 0, $\frac{5}{6}$; son équation est

$$(E_2) \qquad x - 5y + 6 = 0.$$

On ne cherchera pas, d'après ce que nous venons de dire dans une parenthèse, les points d'intersection mêmes de E_1 et E_2 avec $C : y^2 - x = 0$; il suffit de connaître les quatre *directions* qu'ils déterminent avec l'origine et qui ont les quatre *rapports* $\frac{x}{y}$ pour mesure.

En éliminant 1 entre E_1 et $C : y^2 - x = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} x + y & -2 \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \begin{cases} +1 \\ -2 \end{cases},$$

et de même en éliminant entre E_2 et C :

$$\begin{vmatrix} x - 5y & 6 \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}.$$

On voit que l'équation proposée a pour racines 1, 2, -2, 3.

Les deux autres valeurs de μ, qui servent à *fendre* D, donneront encore deux équations du deuxième degré.

Exemple II :

$$(A) \qquad \frac{1}{6}x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 12 = 0,$$

$$(B) \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 12 = 0,$$

$$(D) \qquad \frac{1}{6}x^2 - 2xy - 6x - 12 - \mu(y^2 - x) = 0.$$

$$(F) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{6} & 1 & 3 - \frac{\mu}{2} \\ 1 & \mu & 0 \\ 3 - \frac{\mu}{2} & 0 & -12 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mu = 2, \; 4, \; 6.$$

Choisissons $\mu = 2$. Nous avons d'abord

$$(D_1) \qquad \frac{1}{6}x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x - 12 = 0,$$

le centre se trouve, d'après F : $x = 6$, $y = -3$. En faisant $x = 0$, l'équation (D_1) donne

$$x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{6}.$$

Donc

$$(E_1) \qquad \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(E_1) \qquad x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 2y\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0.$$

$$(E_2) \qquad x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - y2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0.$$

Choisissons

$$(E_1) \qquad x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - y2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = 0.$$

pour déterminer deux racines de A :

$$\begin{vmatrix} x(\sqrt{3}-\sqrt{2})-y\,2\sqrt{3} & -6\sqrt{2} \\ y^2 & -x \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$x^2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) - xy\,2\sqrt{3} - y^2 6\sqrt{2} = 0,$$

ou

$$\frac{x}{y} = \sqrt{6} - 3 \pm \sqrt{3}.$$

De même E_2 aurait donné

$$\frac{x}{y} = -\sqrt{6} - 3 \pm \sqrt{3}.$$

Note. — Il est aisé de former la condition pour que les sections coniques C et D *se touchent* en un point x, y. Cette condition sera indépendante de μ; nous écrirons donc D sous la forme spéciale

$$a_0 x^2 + 4 a_1 xy + 6 a_2 x + 4 a_3 y + a_4 = 0.$$

Quand un tel point x, y existe, on exprimera : 1° qu'il est situé sur les deux sections coniques C et D; 2° que le rapport des trois coordonnées homologues de sa tangente, formée deux fois, pour chacune des sections coniques C et D, est une constante ρ.

On a d'abord

$$(\alpha) \qquad y^2 - x = 0,$$

$$(\beta) \qquad a_0 x^2 + 4 a_1 xy + 6 a_2 x + 4 a_3 y + a_4 = 0,$$

ou

$$(\alpha) \qquad (-1)x + (2y).y + (-x).1 = 0,$$

$$(\beta) \quad \begin{cases} (a_0 x + 2 a_1 y + 3 a_2).x \\ \qquad + (2 a_1 x + 2 a_3 y) + (3 a_2 x + 2 a_3 y + a_4).1 = 0. \end{cases}$$

La condition pour l'existence d'un rapport constant ρ entre les coordonnées (coefficients) homologues des

deux tangentes de x, y, prises par rapport à C et D, donne les trois équations suivantes :

$$(\gamma)\qquad -1 = \rho(a_0 x + 2a_1 y + 3a_2),$$
$$(\delta)\qquad 2y = \rho(2a_1 x + 2a_3),$$
$$(\varepsilon)\qquad -x = \rho(3a_2 x + 2a_3 y + a_4).$$

En multipliant γ, δ, ε respectivement par x, y, 1 et en ajoutant, on voit que, des deux équations (α) et (β), l'une est satisfaite quand l'autre et le système γ, δ, ε sont remplis. Donc on peut supprimer β.

En éliminant ρ entre γ, δ et δ, ε, nous avons finalement le système de trois équations entre lesquelles il s'agira d'éliminer x et y :

$$(\alpha)\quad \text{I.}\qquad y^2 - x = 0,$$
$$(\gamma\delta)\quad \text{II.}\qquad (2a_3 + 4a_1 y^2 + 6a_2 y) + x(2a_1 + 2a_0 y) = 0,$$
$$(\delta\varepsilon)\quad \text{III.}\qquad (2a_4 y + 4a_3 y^2) + (6a_2 y + 2a_3)x + 2a_1 x^2 = 0.$$

En éliminant x entre I et II, on a

$$\begin{vmatrix} y^2 & -1 \\ 2a_3 + 4a_1 y^2 + 6a_2 y & 2a_1 + 2a_0 y \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\zeta)\qquad 2a_0 y^3 + 6a_1 y^2 + 6a_2 y + 2a_3 = 0.$$

De même, en éliminant x entre I et III, on a

$$\begin{vmatrix} y^2 & -1 & 0 \\ 0 & y^2 & -1 \\ 2a_4 y + 4a_3 y^2 & 6a_2 y + 2a_3 & 2a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(\eta)\qquad 2a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 6a_3 y + 2a_4 = 0.$$

Mais, en remplaçant mécaniquement dans les équations (ζ) et (η) la lettre y par le rapport $\frac{x}{y}$ et en multipliant ensuite par y^3 les équations (ζ) et (η) prennent

exactement la forme des deux quotients différentiels de l'équation (B), pris par rapport à x et y. Et l'on voit que l'élimination de y entre (ζ) et (η) serait identique avec l'opération d'élimination qui conduit à la forme connue du *discriminant* de l'équation (A) :

$$\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

D'une manière semblable, *toute* question qui naît de la discussion de l'équation générale du quatrième degré peut être traitée sous forme purement géométrique.

TRANSFORMATION DE FIGURES ANALOGUE A LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

PAR M. D. COELINGH, d'Amsterdam.

Après avoir étudié la transformation suivante, j'ai lu, dans les *Nouvelles Annales* de 1882, le Mémoire de M. Laguerre : *Transformation par semi-droites réciproques*. Bien que les principes qui servent de base à mes considérations soient tout à fait différents de ceux de M. Laguerre, la transformation n'en diffère pas essentiellement. C'est pour cela que je me bornerai ici à signaler ces principes, à développer quelques propriétés que M. Laguerre n'a pas données aussi générales qu'il est possible, et à faire quelques applications.

Propriété relative à une droite et à une circonférence.

Si l'on mène d'un point P (*fig.* 1) sur une droite XX′ deux tangentes à une circonférence O, on aura

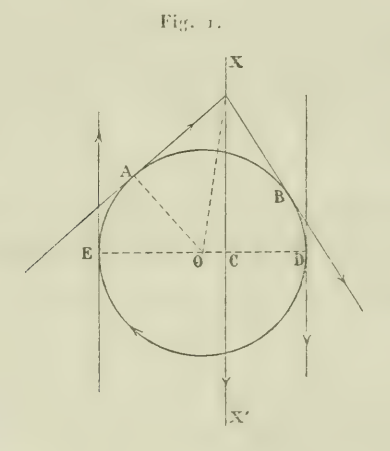
$$\sin \mathrm{APO} = \mathrm{AO} : \mathrm{OP}, \qquad \sin \mathrm{CPO} = \mathrm{OC} : \mathrm{OP},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{APC}}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BPC}} = \frac{\mathrm{AO} + \mathrm{OC}}{\mathrm{AO} - \mathrm{OC}}.$$

Si, pour définir les angles d'une manière précise, on suppose donné sur toutes les droites un sens positif et qu'on ne considère donc que des *semi-droites* et des

Fig. 1.



cycles, comme M. Laguerre l'a fait dans le Mémoire cité, la relation deviendra (si l'on compte les angles dans le sens positif jusqu'à 2π)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{XX}', \mathrm{AP}) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{XX}', \mathrm{PB}) = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{EC}}.$$

Cette relation ne dépend plus de la position de P sur XX′ : ainsi, le produit des tangentes des moitiés

des angles est constant, quelle que soit la position de P sur XX'.

Le théorème est analogue au théorème connu, d'où résulte la définition de la puissance d'un point par rapport à une circonférence.

DC et EC sont les distances à XX' des tangentes de O, qui font avec XX' des angles égaux à zéro et à π. La relation subsiste pour toute droite et tout cycle si l'on compte les distances DC, EC positives, lorsqu'elles sont dirigées vers le centre, négatives si elles sont dirigées en sens opposé.

Le quotient $\frac{DC}{EC}$ sera appelé le *rapport de la semi-droite relativement au cycle* ou celui *du cycle relativement à la semi-droite;* il est positif ou négatif à mesure que la semi-droite coupe le cycle ou non; il est zéro si la semi-droite est une tangente, infini si elle n'en diffère que par le sens; il est égal à l'unité si la semi-droite est diamètre, -1 si le cycle est infiniment petit, c'est-à-dire se réduit à un point.

Définitions. — Théorèmes fondamentaux.

1. Deux semi-droites sont dites *inverses* par rapport à une semi-droite fixe, nommée *axe,* et suivant une constante λ, si elles se rencontrent dans l'axe et que les angles φ et φ' entre l'axe et les semi-droites soient tels que

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' = \lambda.$$

Si les semi-droites sont parallèles à l'axe, elles seront de sens contraires, et le rapport de leurs distances à l'axe sera égal à la constante de l'inversion.

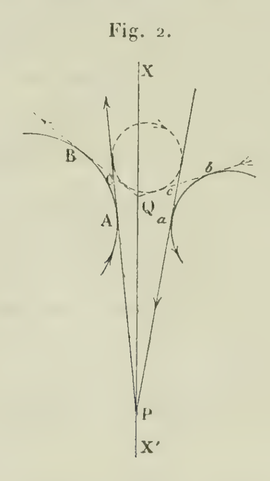
Pour l'inversion, une courbe sera considérée comme l'enveloppe de ses tangentes.

2. Deux semi-droites et leurs inverses sont tangentes à un même cycle.

3. La tangente commune à deux courbes et celle commune aux inverses sont égales, mais de sens contraires.

En effet, si l'on mène par un point P de l'axe (*fig.* 2)

Fig. 2.



les tangentes aP et PA à deux courbes inverses et par un point Q les tangentes voisines bQ et QB, on aura (n° 2)

$$\mathrm{PC} + \mathrm{QC} = c\mathrm{P} + c\mathrm{Q},$$

d'où l'on déduit à la limite

$$2\mathrm{PA} = 2a\mathrm{P}.$$

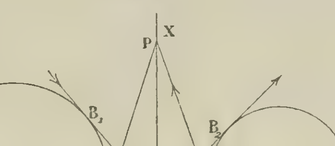
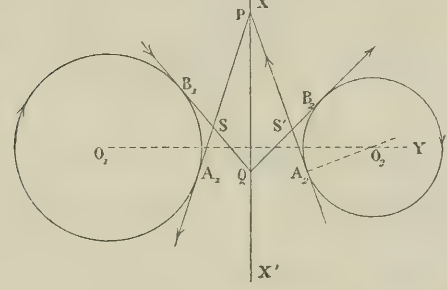
De ce lemme, le théorème énoncé suit immédiatement.

Remarque. — M. Laguerre a démontré ce théorème, par le calcul, dans le cas spécial où les deux courbes sont des cycles (*Nouvelles Annales*, p. 552; 1882).

4. La figure inverse d'un cycle est un autre cycle, l'axe de l'inversion est l'axe radical des deux cycles.

Si la constante de l'inversion est telle que A_2P (*fig.* 3) est l'inverse de PA_1, le cycle, qui a son centre sur

Fig. 3.

O_1Y perpendiculaire à XX' et qui touche A_2P en A_2 ($A_2P = PA_1$), sera l'inverse; en effet, deux tangentes B_1Q et QB_2 seront inverses l'une de l'autre, parce que le quadrilatère PSQS' est circonscriptible.

5. Deux cycles étant donnés, on peut toujours passer de l'un à l'autre par une *inversion tangentielle* et par une seule (avec cette restriction que le sens de l'axe est indéterminé). Le rapport de cette inversion sera nommé le *rapport d'un cycle relativement à l'autre*, PA_1 et A_2P seront dites des *tangentes correspondantes.*

6. Si, dans la *fig.* 3, on mène les tangentes à O_1 et O_2, parallèles à XX', on démontre facilement que

$$\lambda_{1,2}^2 = \lambda_1 \lambda_2,$$

si l'on désigne par $\lambda_{1,2}$ la constante de l'inversion, par λ_1 et λ_2 les rapports de XX' relativement aux cycles O_1 et O_2.

De là résulte

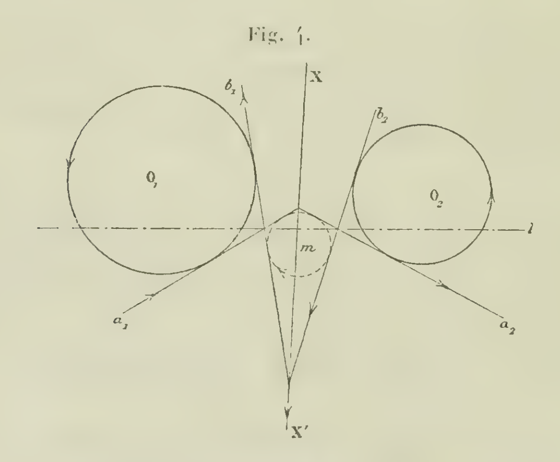
$$\text{pour } \lambda_{1,2}^2 = -\lambda_1, \qquad \lambda_2 = -1,$$
$$\text{pour } \lambda_{1,2}^2 = \lambda_1, \qquad \lambda_2 = 1,$$

c'est-à-dire que, si l'axe d'inversion ne coupe pas le cycle, on peut choisir la constante de l'inversion telle que le cycle inverse se réduise à un point; si l'axe d'inversion coupe le cycle, on peut choisir la constante telle que l'axe devienne diamètre du cycle inverse.

Axes et centres de similitude.

7. Deux cycles O_1 et O_2 (*fig.* 4) ont même rapport relativement à une droite l, qui joint le point de rencontre de deux tangentes de O_1 au point de concours

Fig. 4.



des tangentes correspondantes de O_2 : en effet, en inversant autour de l'axe l, tellement que le cycle inscrit m coïncide avec son inverse, les cycles O_1 et O_2 coïncident aussi avec leurs inverses.

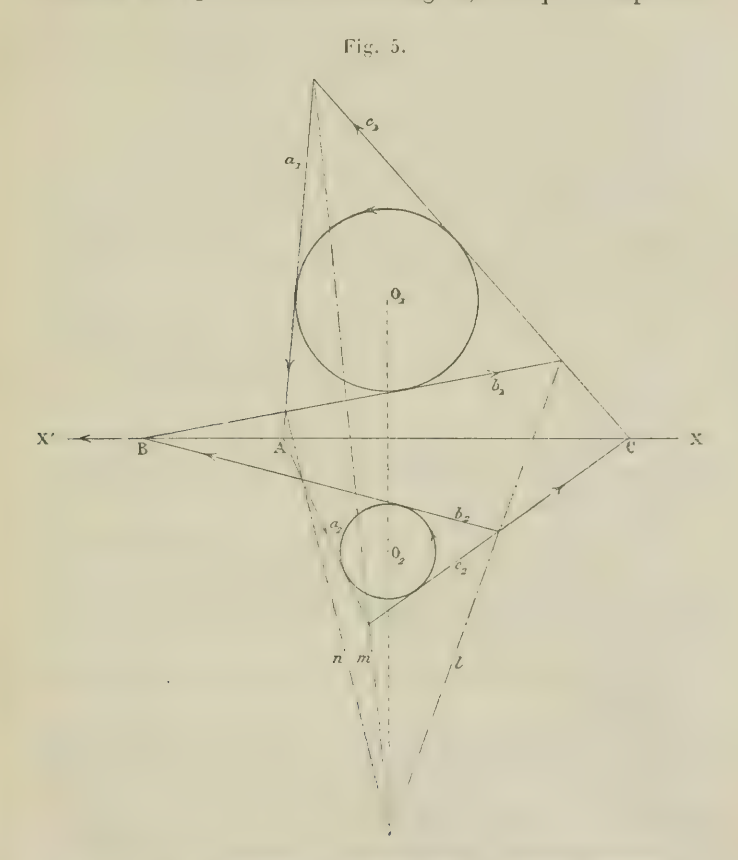
Une semi-droite, qui a même rapport relativement à

quelques cycles, sera appelée *axe de similitude* de ces cycles.

La réciproque du théorème est vraie.

8. Trois tangentes de O_1 (*fig.* 5) et leurs correspondantes de O_2 forment des triangles, tels que les points

Fig. 5.



de concours des côtés deux à deux sont en ligne droite : les droites l, m, n (axes de similitude) qui joignent les sommets deux à deux concourent donc en un point. Si

l'on fait varier les triangles en conservant les droites l et m, la troisième droite n passera toujours, en restant axe de similitude, par le point de rencontre de l et m. De là on déduit facilement que l'enveloppe de tous les axes de similitude de deux cycles est un point : ce point est nommé *centre de similitude*.

La centrale et les tangentes communes aux deux cycles sont des axes de similitude; elles passent par le centre de similitude.

9. Trois cycles ont deux à deux trois centres de similitude. La droite, qui joint deux d'entre eux, aura même rapport relativement aux trois cycles et passera donc par le troisième centre : ces centres sont en ligne droite; c'est le seul axe de similitude.

Il y a une infinité de cycles qui ont même rapport à cet axe; l'ensemble de ces cycles sera nommé un *système de cycles*.

Les cycles communs à deux systèmes sont encore en nombre infini; l'ensemble de ces cycles sera nommé un *faisceau de cycles*.

Toute paire de cycles d'un faisceau a les mêmes deux axes de similitude; toutes les paires ont donc même centre de similitude : c'est le centre de similitude du faisceau.

Le centre de similitude est le cycle infiniment petit du faisceau.

Les centres des cycles d'un faisceau sont en ligne droite, car la droite qui joint le centre de similitude au centre d'un cycle est diamètre de tous.

Si le centre de similitude est intérieur aux cycles, tous les axes de similitude ont un rapport positif (faisceau positif).

Si le centre de similitude est extérieur aux cycles,

les tangentes, menées par ce point à un cycle du faisceau, seront tangentes à tous les cycles du faisceau (faisceau négatif).

Longueur de tangentes communes à deux cycles. Inversion de systèmes et de faisceaux.

10. Un cycle tangent à deux paires de tangentes correspondantes de deux autres cycles a, aux deux cycles, des *distances tangentielles* égales (*voir* le Mémoire cité, p. 544); il a, relativement à l'axe radical, un rapport égal au rapport d'un des cycles relativement à l'autre.

En effet, la démonstration résulte immédiatement de l'inversion qui fait passer O_1 en O_2, si du moins on fait attention au théorème du n° 3.

Les réciproques sont vraies.

11. Tous les cycles, qui ont à deux cycles donnés des distances tangentielles égales, forment donc un système; l'axe radical des deux cycles est l'axe de similitude du système.

12. De cela on déduit facilement, en faisant attention au n° 3, que la figure inverse d'un système est encore un système de cycles.

13. Le faisceau, étant l'intersection de deux systèmes, a pour figure inverse un autre faisceau.

Cas particuliers. — 1° En vertu du n° 6, on peut toujours réduire un faisceau négatif, par l'inversion tangentielle, à une série de points en ligne droite; l'axe de l'inversion sera un axe de similitude qui ne coupe pas les cycles. C'est à ce cas spécial, ou plutôt au cas

analogue du *système* de cycles, que M. Laguerre fait allusion (p. 552 du Mémoire cité).

2° On peut toujours réduire un faisceau positif, par l'inversion, à un groupe de cycles concentriques. En effet, si l'axe d'inversion est un axe de similitude, on peut toujours choisir la constante de telle sorte que tous les centres dans la figure inverse se trouvent sur l'axe (n° 6); de plus, si cet axe d'inversion est pris perpendiculaire à la centrale du faisceau, tous les centres se confondent.

Remarque. — Le centre de similitude du faisceau inverse n'est pas l'inverse du centre, mais d'un cycle du faisceau donné.

14. A l'aide du théorème du n° 10 et de ses réciproques, on démontre facilement : si deux cycles m_1 et m_2 d'un faisceau ont chacun des distances tangentielles égales à deux cycles donnés O_1 et O_2, tout cycle du faisceau a des distances tangentielles égales à O_1 et O_2.

15. Si l'on considère O_1 et O_2 comme deux positions arbitraires d'un cycle mobile, le théorème peut s'énoncer ainsi :

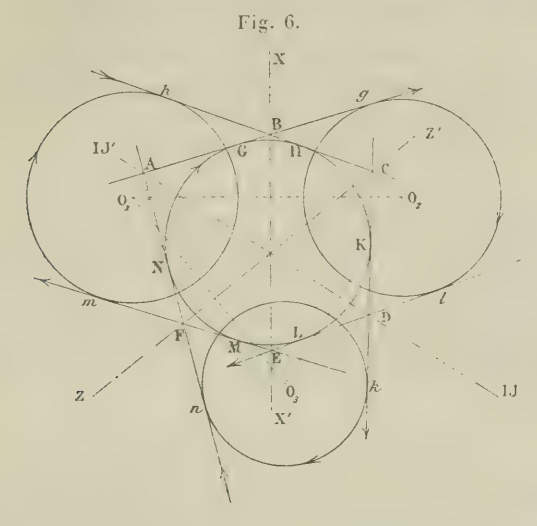
Si un cycle mobile a une distance tangentielle constante à deux cycles d'un faisceau, il a à tout cycle du faisceau une distance constante et (puisque deux de ces distances peuvent s'évanouir) il touche, en général, deux cycles fixes du faisceau.

Ces cycles fixes peuvent facilement être construits à l'aide d'une inversion du n° 13.

16. Les cycles, qui ont des distances tangentielles

égales à *trois* cycles donnés O_1, O_2, O_3 (*fig.* 6), forment un faisceau, intersection de deux systèmes du

Fig. 6.



n° 11 ; le centre radical des trois cycles est le centre de similitude du faisceau[1].

17. S'il s'agit donc de construire les cycles qui soient tangents à trois cycles donnés, il faudra les chercher dans ce faisceau : la solution de cette question (connue sous le nom de *problème d'Apollonius*) a été indiquée déjà au n° 15.

S'il s'agit de la question plus générale de décrire un

---

(1) On peut encore déduire de la *fig.* 6 une démonstration facile du théorème de Brianchon : si l'on prolonge les côtés de l'hexagone circonscrit ABCDEF jusqu'à ce qu'on ait

$$Gg = Hh = Kk = Ll = Mm = Nn,$$

et que l'on construise ensuite les trois cycles qui touchent en h, m, en g, l, en k, n les côtés opposés de l'hexagone, les diagonales XX', YY', ZZ' seront les axes radicaux de ces trois cycles.

cycle qui ait, à trois cycles donnés, des distances tangentielles égales et données, on peut, par les inversions du n° 13, réduire la question à une des suivantes :

Trouver sur une droite donnée un point tel, que la tangente, menée de ce point à un cycle donné, soit d'une longueur donnée;

ou

Décrire d'un point donné comme centre un cycle qui ait à un cycle donné une distance tangentielle donnée.

Ces questions sont assez faciles à résoudre. Elles comportent au plus deux solutions.

Systèmes de tangentes à un cycle.

18. Le rapport anharmonique de quatre tangentes d'un cycle est égal au rapport anharmonique des inverses.

En effet, ce rapport étant le rapport anharmonique constant des quatre points de rencontre d'une tangente arbitraire avec les tangentes considérées, si l'on prend pour les deux tangentes arbitraires des tangentes correspondantes (n° 5), il est clair, d'après la *fig.* 5, que les deux séries de quatre points sont les perspectives l'une de l'autre, le centre de similitude étant le centre de la perspective [1].

---

[1] On peut aussi démontrer ce théorème en évaluant en fonction des angles de la figure inverse le *rapport double*

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(3,1)}{\sin\frac{1}{2}(3,2)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(4,2)}{\sin\frac{1}{2}(4,2)},$$

(3,1), ... désignant l'angle entre les tangentes 3 et 1, ...

19. Un système de paires de tangentes d'un cycle étant dit *en involution* si le rapport anharmonique de quatre tangentes quelconques est égal à celui des tangentes conjuguées, il s'ensuit du théorème du n° 18 qu'un système de tangentes sera en involution si les points de rencontre des tangentes conjuguées sont en ligne droite. De plus, on démontre facilement qu'il n'existe pas d'autres systèmes en involution.

20. De cela, il est évident que les paires de tangentes communes à un cycle d'un système et à tous les autres cycles du même système sont en involution. De même, les paires de tangentes communes à un cycle quelconque et aux angles d'un faisceau.

21. Il peut se présenter (lorsque l'*axe* de l'involution coupe le cycle) que deux tangentes conjuguées se confondent en une seule, nommée *tangente double*. Cela posé, on déduit facilement du théorème du n° 15 :

L'enveloppe des tangentes doubles de tous les systèmes de tangentes en involution, déterminés par un faisceau de cycles et par un cycle mobile, qui reste à des distances tangentielles constantes de deux, *et par conséquent de* tous *les cycles du faisceau, est composée de deux cycles du faisceau.*

22. Remarquons, en dernier lieu, l'analogie entre la transformation par rayons vecteurs réciproques et l'inversion tangentielle, et celle entre les propriétés déduites à l'aide des deux transformations. Cette analogie est complète ; en effet, les théorèmes démontrés ci-dessus ont leurs correspondants et l'on n'a, pour les trouver, plus rien à faire qu'à remplacer dans les énoncés donnés les *tangentes d'un cycle* par les *points*, le *rapport d'une*

semi-droite par *la puissance d'un point*, la *longueur d'une tangente* par la *grandeur d'un angle*, l'*axe et le centre radical* par le *centre et l'axe de similitude* (et réciproquement), les *groupes de cycles à centre et à axe de similitude* par les *groupes à axe et à centre radical.*

On peut poursuivre plus loin cette analogie en cherchant : 1° la relation (α) entre les rayons vecteurs d'un point origine aux points d'une circonférence : 2° la relation (β) entre les angles entre un axe fixe et la tangente d'un cycle, pour qu'une circonférence et un cycle aient pour figures transformées une autre circonférence et un autre cycle.

En désignant par A la distance du point origine au centre, par R le rayon de la circonférence, par x le rayon vecteur, par y celui de la figure transformée, on trouve

$$(\alpha) \qquad \frac{x}{A} + \frac{A^2 - R^2}{Ax} = C_1 y + \frac{C_2}{y},$$

C_1 et C_2 étant des constantes arbitraires qui définissent la circonférence transformée.

De même, en désignant par a la distance de l'axe fixe au centre, par r le rayon du cycle, par φ et χ les angles entre l'axe fixe et deux tangentes inverses, on trouve

$$\frac{r - a\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{k_1 - k_2\cos\chi}{\sin\chi},$$

relation qui, en posant $\tang\frac{1}{2}\varphi = x$, $\tang\frac{1}{2}\chi = y$, devient

$$(\beta) \qquad (r + a)x + \frac{r - a}{x} = K_1 y + \frac{K_2}{y}.$$

Les relations (α) et (β) sont identiques pour

$$A^2 - R^2 = \frac{r - a}{r + a},$$

c'est-à-dire les transformations (α) et (β) sont correspondantes deux à deux, et l'on déduit l'une de l'autre en remplaçant la distance de deux points par la tangente de la moitié de l'angle entre deux semi-droites, et la puissance d'un point par le rapport d'une semi-droite relativement à un cycle.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE;

PAR M. ERNEST CESARO.

La question dont il s'agit a été l'objet d'une Communication de M. Pellet à l'Académie des Sciences, le 31 mai 1887. Ayant porté sur les normales à une ligne (M), inclinées de α sur les normales principales, des longueurs $MM_1 = l$, étudions la ligne (M_1) en prenant pour axes mobiles la tangente, la binormale et la normale principale à (M), en M. Les coordonnées de M_1 sont

$$x = 0, \qquad y = l\sin\alpha, \qquad z = l\cos\alpha,$$

et leurs dérivées par rapport à s sont nulles. On a donc

$$(1)\qquad \frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho}, \qquad \frac{\delta y}{ds} = -\frac{l\cos\alpha}{r}, \qquad \frac{\delta z}{ds} = \frac{l\sin\alpha}{r}.$$

Il en résulte que le rapport des carrés des vitesses des points M_1, M est

$$(2)\qquad K^2 = \left(1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho}\right)^2 + \frac{l^2}{r^2},$$

ce qui permet de poser

$$(3)\qquad 1 - \frac{l\cos\alpha}{\rho} = K\cos u, \qquad \frac{l}{r} = K\sin u,$$

u étant l'angle des tangentes aux deux lignes, en M et M_1. Dès lors, les cosinus directeurs de la tangente à (M_1), en M_1, sont, d'après (1),

$$a = \cos u, \qquad b = - \cos\alpha \sin u, \qquad c = \sin\alpha \sin u.$$

On remarquera que $b \sin\alpha + c \cos\alpha = 0$. La ligne (M_1) rencontre donc orthogonalement les droites MM_1. Que faut-il pour que ces droites soient les normales principales de (M_1)? Telle est la question posée par M. Pellet, et que nous allons résoudre par les méthodes intrinsèques.

Pour que MM_1 soit la normale principale de (M_1), en M_1, il faut et il suffit, en vertu des formules de Frenet, que δa soit nul. Mais

$$\frac{\delta a}{ds} = \frac{da}{ds} - \frac{c}{\rho} = - \left(\frac{du}{ds} + \frac{\sin\alpha}{\rho}\right) \sin u,$$

et l'on peut écarter l'hypothèse $\sin u = 0$, qui nous conduirait au cas de deux lignes planes, parallèles. Conséquemment

$$u = - \sin\alpha \int \frac{ds}{\rho}. \tag{4}$$

D'autre part, les formules (3) nous donnent

$$\frac{r}{\rho} \operatorname{tang} u = \frac{l}{\rho - l \cos\alpha}. \tag{5}$$

On obtient donc, par élimination de u, une des équations intrinsèques de (M), l'autre équation restant arbitraire.

Supposons connues les équations intrinsèques de (M), et tâchons d'en déduire celles de (M_1). Connaissant ρ et r en fonction de s, on connaîtra K par (2), et u par (4)

ou par (5). Cela étant, on a immédiatement

$$(6) \qquad s_1 = \int K\,ds.$$

Pour avoir la flexion de (M_1) remarquons que

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial b}{ds} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial c}{ds} = \frac{\cos\alpha\cos u}{\rho} - \frac{\sin u}{r}.$$

Le dernier membre représente donc $\frac{\varepsilon_1}{ds}\cdot$ Par suite

$$(7) \qquad \frac{K}{\rho_1} = \frac{\cos\alpha\cos u}{\rho} - \frac{\sin u}{r},$$

ou bien, en vertu de (3),

$$(8) \qquad 1 + \frac{l}{\rho_1} = \frac{\cos u}{K}.$$

Quant à la torsion, remarquons d'abord que les cosinus directeurs de la binormale à (M_1), en M_1, sont

$$A = \sin u, \qquad B = \cos\alpha\cos u, \qquad C = -\sin\alpha\cos u.$$

Conséquemment, en tenant compte de (4), on a $\partial A = 0$, et

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial B}{ds} = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial C}{ds} = \frac{\cos\alpha\sin u}{\rho} + \frac{\cos u}{r}.$$

On en déduit

$$(9) \qquad \frac{K}{r_1} = \frac{\cos\alpha\sin u}{\rho} + \frac{\cos u}{r},$$

ou bien, en vertu de (3),

$$(10) \qquad \frac{l}{r_1} = \frac{\sin u}{K}.$$

L'élimination de s, entre (6), (8), (10), conduit aux équations intrinsèques de (M_1).

Remarquons, en passant, que (8) et (10) se déduisent des égalités (3) par le changement de K en $\frac{1}{K}$ et de α en π. Remarquons encore que la combinaison de (10) avec (3) donne lieu aux relations

$$rr_1 \sin^2 u = l^2, \qquad r_1 = K^2 r,$$

dont la première a été signalée par M. Pellet.

Soient φ et φ_1 les angles de (M) et (M$_1$) avec les génératrices de leurs développables rectifiantes. Si l'on divise (7) par (9), on obtient sans peine la formule

$$\text{tang}(\varphi_1 - u) = \cos\alpha \,\text{tang}\,\varphi,$$

qui va nous servir à chercher, avec M. Pellet, quelle doit être (M) pour que (M$_1$) soit une droite D. Il faut évidemment que l'on ait $\varphi_1 = 0$ et, par suite,

$$\text{tang}\,u = \frac{r}{\rho}\cos\alpha;$$

puis, par comparaison avec (5),

(11) $$\rho \sin^2 u = l\cos\alpha.$$

Cela étant, la formule (4) donne

$$s \sin\alpha = -\int \rho\, du = l\cos\alpha \cot u;$$

d'où, successivement,

(12) $$s\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,u = l, \qquad r\sin^2 u = \frac{l^2}{s\,\text{tang}\,\alpha}.$$

Il suffit, maintenant, d'éliminer u entre (11) et (12) pour avoir les équations intrinsèques de (M). On obtient

$$\rho = l\cos\alpha + \frac{s^2\sin^2\alpha}{l\cos\alpha}, \qquad \frac{r}{\rho} = \frac{l}{s\sin\alpha}.$$

La seconde équation nous dit que (M) est géodésique sur un certain cône, dont le sommet est évidemment le point de rencontre du plan rectifiant avec la droite D. Remarquons que cette droite est toujours perpendiculaire à MM_1, et, par suite, le point M reste à la distance l de D. Autrement dit, la ligne (M) est tracée sur un cylindre de révolution dont D est l'axe et l le rayon. Quelle est la transformée de (M) lorsqu'on déploie le cylindre sur un plan ? Rappelons que, si l'on enroule sur un cylindre de révolution, de rayon l, le plan d'une ligne, la nouvelle valeur de la flexion est donnée par la formule

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{\cos^4\theta}{l^2}, \tag{13}$$

θ étant l'angle des tangentes avec les droites du plan, qui se transforment en cercles. Si la ligne plane est une chaînette de paramètre k, de sorte que

$$\rho_0 = k + \frac{s_0^2}{k},$$

on a

$$\rho_0 \cos^2\theta = k,$$

pourvu qu'on enroule la directrice suivant un cercle. La formule (13) donne

$$\rho = \frac{l\rho_0}{\sqrt{l^2 + k^2}}.$$

D'ailleurs $s_0 = s$. Donc

$$\rho = \frac{l}{\sqrt{l^2 + k^2}}\left(k + \frac{s^2}{k}\right).$$

Cette équation coïncidera avec la première équation intrinsèque de (M), si l'on prend $k = l\cot\alpha$. On obtient donc la ligne (M) en enroulant sur un cylindre de révo-

lution, de rayon l, une chaînette de paramètre $l \cot \alpha$, en ayant soin de diriger l'axe de la courbe suivant les génératrices du cylindre. La directrice se transforme alors en une circonférence, ayant pour centre le sommet du cône rectifiant de la courbe considérée.

SUR LA COURBURE DES CONIQUES;

Par M. E. CESARO.

1. Soient, par rapport à la tangente et à la normale en un point M d'une ligne quelconque, α et β les coordonnées d'un point fixe O, centre d'une conique osculatrice, en M, à la ligne considérée. L'équation de la conique est de la forme

$$(1)\qquad A(x-\alpha)^2 + 2C(x-\alpha)(y-\beta) + B(y-\beta)^2 = 1,$$

et l'immobilité de O est exprimée par les égalités

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta - \rho}{\rho}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

Différentions (1) deux fois de suite; puis, pour exprimer l'osculation avec la ligne fondamentale, supposons

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y' = 0, \qquad y'' = \frac{1}{\rho}.$$

On détermine ainsi les coefficients A, B, C, et l'on voit que l'équation de la conique osculatrice est

$$(3)\qquad (\beta x - \alpha y)^2 = \beta\rho y(2\beta - y).$$

2. Pour chercher l'enveloppe de cette conique, diffé-

rentions l'équation (3) en supposant

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y - \rho}{\rho}, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho},$$

et en tenant compte de (2). Il vient

(4) $$y(2\beta - y)\left(\beta\frac{d\rho}{ds} - 3\alpha\right) = 0.$$

Si

(5) $$\frac{d\rho}{ds} = 3\frac{\alpha}{\beta},$$

l'équation (4) est vérifiée identiquement, et, par suite, la ligne fondamentale coïncide avec la conique osculatrice. Il en résulte que l'équation (5) caractérise les coniques. Elle nous dit que, pour avoir le deuxième centre de courbure, N, en un point M d'une conique, il faut d'abord chercher le point P, où le diamètre OM rencontre la normale à la développée. Cela étant, le segment PN est partagé par le premier centre de courbure dans le rapport de 1 à 3.

3. La dernière propriété nous présente les coniques comme appartenant à une classe, très étendue, de courbes. Il suffit de se demander quelles sont les lignes, pour lesquelles le deuxième centre de courbure se construit comme précédemment, sauf que le segment PN doit être partagé par le premier centre de courbure dans le rapport de 1 à m. On doit écrire, au lieu de (5),

(6) $$\frac{d\rho}{ds} = m\frac{\alpha}{\beta};$$

puis, en vertu de (2),

$$\frac{d\rho}{ds} + \frac{m\rho}{\beta}\frac{d\beta}{ds} = 0.$$

d'où l'on déduit

$$(7) \qquad \rho = \frac{k}{\beta^m}.$$

Dès lors, une des équations (2) devient, pour $m \gtrless 1$,

$$\alpha = -\frac{k}{\beta^m}\frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{m-1}\frac{d}{ds}\frac{k}{\beta^{m-1}}.$$

D'autre part, les mêmes équations donnent

$$\alpha\frac{d\alpha}{ds} + \beta\frac{d\beta}{ds} + \alpha = 0,$$

d'où, par intégration,

$$(8) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \frac{2k}{m-1}\beta^{1-m} = k'.$$

Par élimination de α, β entre les équations (6), (7), (8), et par substitution de s, $\frac{\rho}{s}$, à ρ, $\frac{d\rho}{ds}$, respectivement, on voit que les développées premières des courbes dont il s'agit sont représentées par l'équation intrinsèque générale

$$\rho = ms\sqrt{As^{\frac{2}{m}} + Bs^{1+\frac{1}{m}} - 1}.$$

En particulier, pour $m = -1$, on obtient les lignes cycloïdales.

Le cas où $k' = 0$, ce qui entraîne $A = 0$, est fort important : on obtient alors les spirales sinusoïdes, dont nous parlerons dans un prochain article. Le paramètre m suffit, en général, pour caractériser une famille de courbes; mais il convient de remarquer qu'il y a des exceptions, en nombre restreint. Une épicycloïde répond aux valeurs $m = -1$ et $m = -\frac{1}{3}$. Cela s'explique par la possibilité de l'existence de deux points différents, jouant le rôle du point O. C'est ainsi que la parabole

admet, comme toute conique, le paramètre 3, lorsque le point O est à l'infini, sur l'axe ; mais elle admet également le paramètre — 3, lorsque le point O est le foyer.

4. Pour les coniques, la détermination de k et k' se fait aisément en fonction des longueurs a et b des demi-axes. En effet, lorsque la normale passe par le centre, elle coïncide avec un axe, et, par suite, si $\alpha = 0$, on doit avoir $\beta = a$ ou $\beta = b$. Si l'on porte ces hypothèses dans la relation (8), en supposant $m = 3$, on obtient

$$(9) \qquad k = a^2 b^2, \qquad k' = a^2 + b^2.$$

Donc, en tenant compte de (7) et de (8), on voit que les longueurs des axes de la conique osculatrice à une ligne quelconque sont données par les équations

$$(10) \qquad a^2 b^2 = \beta^3 \rho, \qquad a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \beta\rho.$$

Il est clair que celles-ci ne cessent de subsister lorsque le point O est mobile dans le plan. Les dernières équations peuvent donc servir à résoudre toute question concernant les séries de coniques, qui osculent une ligne quelconque en tous ses points. Quant aux équations (2), elles subsistent seulement dans le cas particulier où les coniques considérées ont même centre. Dans d'autres cas particuliers, on doit chercher, avant tout, les relations qu'il faut substituer aux équations (2). Ainsi, par exemple, si l'on veut considérer une série de coniques égales, on doit différentier les équations (10), en y supposant a et b constants, et en tenant compte de (5).

5. On interprète aisément les équations (10). La première donne lieu à tous les théorèmes connus sur la courbure des coniques. La seconde nous dit que, si du

milieu du rayon de courbure, comme centre, on décrit la circonférence qui passe par le symétrique du centre de la courbe, relativement à la tangente, on détermine sur cette droite un segment constant. Ce segment est nul pour les hyperboles équilatères. Une propriété semblable appartient à toutes les courbes définies par l'équation (6). En effet, l'équation (8) prend, en vertu de (7), la forme

$$\alpha^2 + \left(\beta + \frac{\rho}{m-1}\right)^2 = \frac{\rho^2}{(m-1)^2} + k'.$$

6. En particulier, pour $m = -1$, on voit que la circonférence ayant pour centre le milieu d'un rayon de courbure d'une ligne cycloïdale, et passant par le centre du cercle directeur, découpe sur la tangente une corde de longueur constante. On peut ajouter que cette corde est égale au diamètre du cercle directeur. En effet, la détermination des constantes k, k' se fait aisément en observant que l'on a $\alpha = \mathrm{R}$, $\beta = 0$, aux points de rebroussement, et $\alpha = 0$, $\beta = \mathrm{R} + 2r$, aux sommets de la courbe: R et r sont les rayons du cercle directeur et du cercle roulant. On trouve ainsi, au lieu de (8),

$$\frac{\alpha^2}{\mathrm{R}^2} + \frac{\beta^2}{(\mathrm{R}+2r)^2} = 1. \tag{11}$$

Cela prouve que, aux yeux d'un mobile parcourant une ligne cycloïdale, le centre du cercle directeur semble se mouvoir sur une ellipse. Cela étant, l'équation (7) donne

$$\beta = \frac{(\mathrm{R}+2r)^2}{4r(\mathrm{R}+r)}\rho, \tag{12}$$

et l'on en déduit, en vertu de la première des équations (2),

$$\rho = \frac{\mathrm{R}^2}{4r(\mathrm{R}+r)}s. \tag{13}$$

puis, par substitution dans (11),

$$(R+2r)^2\rho^2+R^2s^2=16r^2(R+r)^2.$$

C'est l'équation intrinsèque de la ligne cycloïdale.

7. Revenons aux coniques. Si l'on porte les valeurs (9) dans l'égalité (8), en supposant $m=3$, on obtient

$$(a^2-\beta^2)(\beta^2-b^2)=\alpha^2\beta^2. \tag{14}$$

C'est l'équation de la courbe que le centre semble décrire, aux yeux d'un mobile parcourant la conique (¹). Cette équation permet d'écrire

$$\beta^2-b^2=\alpha\beta\,\text{tang}\,\varphi,\qquad a^2-\beta^2=\alpha\beta\cot\varphi,$$

et l'on reconnaît sans peine que φ représente l'inclinaison de la tangente sur le grand axe. On trouve aussi

$$2\alpha\beta=c^2\sin 2\varphi,\qquad \alpha^2-\beta^2+\beta\rho=c^2\cos 2\varphi,$$

où $2c$ représente la distance focale. En tenant compte de (2), ces équations montrent que, si l'on pose, pour abréger,

$$2\mathrm{K}c=\beta\frac{d\rho}{ds}-3\alpha, \tag{15}$$

on a

$$a\frac{da}{ds}=\mathrm{K}c\cos^2\varphi,\qquad b\frac{db}{ds}=\mathrm{K}c\sin^2\varphi,$$

$$\frac{dc}{ds}=\mathrm{K}\cos 2\varphi,\qquad \frac{d\varphi}{ds}=-\frac{1}{\rho}-\frac{\mathrm{K}}{c}\sin 2\varphi.$$

8. On peut appliquer ces formules à la recherche des lignes décrites par les foyers. Les coordonnées d'un foyer

(¹) On suppose, bien entendu, que le mobile *se rende compte* de la courbure de la trajectoire, ce qui, en réalité, n'arrive pas. On peut dire aussi que l'équation considérée représente le lieu des centres des coniques égales, touchant une droite donnée en un point donné.

sont

$$x = \alpha + c \cos\varphi, \qquad y = \beta + c \sin\varphi,$$

et l'on trouve, par les moyens habituels, que leurs variations absolues dans le plan sont données par les formules

$$\frac{\delta x}{ds} = \mathrm{K} \cos\varphi, \qquad \frac{\delta y}{ds} = - \mathrm{K} \sin\varphi.$$

Donc la tangente au lieu d'un foyer et le grand axe sont également inclinés sur la tangente à la courbe. On voit aussi que le rapport des arcs élémentaires des deux courbes est précisément la fonction K, définie par (15), de sorte que

$$(16) \qquad s_0 = \int \mathrm{K}\, ds.$$

Enfin, le rayon de courbure est donné par

$$(17) \qquad \frac{1}{2\rho_0} = \frac{1}{\mathrm{K}\rho} + \frac{\alpha\beta}{c^3}.$$

Les équations (16) et (17) conduisent, dans chaque cas particulier, à l'équation intrinsèque du lieu des foyers. On a une application simple de ces formules en considérant les coniques osculatrices à une ligne cycloïdale, et concentriques au cercle directeur. Il faut employer, dans ce cas, les formules (12) et (13).

9. Nous avons vu que le rayon de courbure d'une conique est donné par la formule

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{\rho^3}.$$

L'élimination de α, β, entre cette équation et les équations (5), (14), donne

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 + 9\left[1 - \left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\left[1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 0.$$

L'équation intrinsèque d'une développée de conique est donc

$$\rho = 3s\sqrt{\left[\left(\frac{as}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{bs}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}.$$

En particulier, on a

$$\rho = 3s\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1},$$

pour la développée d'une hyperbole équilatère, et

$$\rho = 3s\sqrt{\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}.$$

pour la développée d'une parabole.

10. La méthode précédente est facilement applicable à l'étude de la courbure d'une ligne quelconque. On généralise, par exemple, les résultats qui précèdent, en étudiant les lignes représentées, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$Ax^m + 2Cx^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m}{2}} + By^m = 1.$$

On trouve que la courbure varie en raison directe de la $(m-2)^{\text{ième}}$ puissance de la distance de l'origine à la normale, et de la $(m+1)^{\text{ième}}$ puissance de la distance de l'origine à la tangente. Des résultats d'une plus grande généralité peuvent être obtenus, en considérant une équation cartésienne quelconque, renfermant trois arbitraires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1581. Étant donné un quadrilatère complet, dont les six sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1, on peut former les quatre triangles

$$ab_1c_1, \quad bc_1a_1, \quad ca_1b_1, \quad abc.$$

Si l'on prend trois points en ligne droite

$$A, \quad B, \quad C,$$

les quatre coniques

$$(BCab_1c_1), \quad (BCbc_1a_1), \quad (BCca_1b_1), \quad (BCabc)$$

passent par un même point A_1;

$$(CAab_1c_1), \quad (CAbc_1a_1), \quad (CAca_1b_1), \quad (CAabc)$$

passent par un même point B_1;

$$(ABab_1c_1), \quad (ABbc_1a_1), \quad (ABca_1b_1), \quad (ABabc)$$

passent par un même point C_1.

Les points A, B_1, C_1 sont en ligne droite; B, C_1, A_1 aussi; C, A_1, C_1 aussi, et les huit côtés des deux quadrilatères, dont les sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1 et A, A_1, B, B_1, C, C_1, touchent une même conique.

(H. Schroeter.)

1582. Les coniques semblablement situées qui ont même cercle directeur sont inscrites au même carré. Démontrer aussi que, si deux telles coniques se coupent en M, les tangentes au point M font des angles égaux avec un côté du carré.

(R.-W. Genese.)

NOTE SUR L'INTÉGRALE $\int_a^b f(x)\,G(x)\,dx$;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

L'objet de cette Note est la démonstration de la proposition suivante :

Soit $f(x)$ une fonction non décroissante entre les limites $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$. Alors il est toujours possible de déterminer n constantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b,$$

et $n+1$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ qui sont comprises respectivement dans les $n+1$ intervalles formés par les $n+2$ quantités

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_{n-1}),\quad f(x_n),\quad f(b),$$

de telle façon qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\,G_{2n}(x)\,dx \\
&\quad = a_1 \int_a^{x_1} G_{2n}(x)\,dx + a_2 \int_{x_1}^{x_2} G_{2n}(x)\,dx \\
&\quad + a_3 \int_{x_2}^{x_3} G_{2n}(x)\,dx + \ldots \\
&\quad + a_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} G_{2n}(x)\,dx + a_{n+1} \int_{x_n}^{b} G_{2n}(x)\,dx,
\end{aligned}$$

$G_{2n}(x)$ étant un polynôme quelconque en x du degré $2n$ au plus.

1. La détermination des constantes x_k, a_k est évidemment un problème déterminé, car les conditions

imposées fournissent $2n+1$ relations entre ces inconnues. Pour les écrire, nous pouvons prendre

$$G_{2n}(x)=(x-a)^k$$

en faisant

$$k=0,1,2,\ldots,2n.$$

Il vient ainsi

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(k+1)\int_a^b (x-a)^k f(x)\,dx\\ &\quad=-(a_2-a_1)(x_1-a)^{k+1}\\ &\qquad-(a_3-a_2)(x_2-a)^{k+1}\\ &\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad-(a_{n+1}-a_n)(x_n-a)^{k+1}+a_{n+1}(b-a)^{k+1} \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n).$$

Remplaçons dans cette relation k par $k+1$ et retranchons les deux équations, après avoir multiplié la première par $b-a$; on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b [(b-a)(k+1)\\ &\qquad-(k+2)(x-a)](x-a)^k f(x)\,dx\\ &\quad=-(a_2-a_1)(b-x_1)(x_1-a)^{k+1}\\ &\qquad-(a_3-a_2)(b-x_2)(x_2-a)^{k+1}\\ &\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad-(a_{n+1}-a_n)(b-x_n)(x_n-a)^{k+1} \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1).$$

Pour simplifier, nous posons

$$(3)\quad (a_{k+1}-a_k)(b-x_k)(x_k-a)=A_k \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

et nous remarquons que

$$\begin{aligned} &\int[(b-a)(k+1)-(k+2)(x-a)](x-a)^k f(x)\,dx\\ &\quad=(b-x)(x-a)^{k+1}f(x)-\int(b-x)(x-a)^{k+1}f'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Les relations (2) peuvent donc s'écrire

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b (b-x)(x-a)^{k+1}f'(x)\,dx\\ &\quad=A_1(x_1-a)^k+A_2(x_2-a)^k+\ldots+A_n(x_n-a)^k \end{aligned}\right\}\quad (k=0,1,2,\ldots,2n-1).$$

et il est clair par là qu'on aura

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b (b-x)(x-a)f'(x)\,G_{2n-1}(x)\,dx \\ &= A_1 G_{2n-1}(x_1) + A_2 G_{2n-1}(x_2) + \ldots + A_n G_{2n-1}(x_n). \end{aligned} \right.$$

$G_{2n-1}(x)$ étant un polynôme quelconque en x du degré $2n-1$ au plus. On reconnaît maintenant que la détermination de x_1, x_2, ..., x_n, A_1, A_2, ..., A_n revient à la solution d'un problème bien connu. On sait que x_1, x_2, ..., x_n sont les racines de l'équation

$$(5)\qquad P_n(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots = 0,$$

$P_n(x)$ étant le dénominateur du degré n d'une des réduites de la fraction continue

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_a^b \frac{(b-z)(z-a)f'(z)}{x-z}\,dz \\ &= \cfrac{\lambda_0}{x-\alpha_0-\cfrac{\lambda_1}{x-\alpha_1-\cfrac{\lambda_2}{x-\alpha_2-\ldots}}} \end{aligned} \right.$$

Ces racines sont réelles, inégales et comprises dans l'intervalle (a, b), et nous pouvons supposer

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

On connaît aussi l'expression des constantes A_k qui sont positives. En posant

$$Q_n(x) = \int_a^b (b-z)(z-a)f'(z)\,\frac{P_n(x)-P_n(z)}{x-z}\,dz,$$

$\dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ est une des réduites de la fraction continue, et l'on a

$$A_k = \frac{Q_n(x_k)}{P'_n(x_k)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

On peut encore se servir de la formule suivante qui

n'exige pas la connaissance du numérateur $Q_n(x)$,

(7) $$A_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{P_{n-1}(x_k) P'_n(x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Les constantes λ_k, α_k qui figurent dans la fraction continue et les polynômes $P_k(x)$ se calculent de proche en proche par les relations

(8) $$\begin{cases} P_0 = 1, \\ P_1 = x - \alpha_0, \\ P_2 = (x - \alpha_1) P_1 - \lambda_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_{k+1} = (x - \alpha_k) P_k - \lambda_k P_{k-1}; \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} \lambda_0 = \displaystyle\int_a^b (b - z)(z - a) f'(z)\, dz \\ \lambda_k = \dfrac{\displaystyle\int_a^b (b - z)(z - a) f'(z) [P_k(z)]^2\, dz}{\displaystyle\int_a^b (b - z)(z - a) f'(z) [P_{k-1}(z)]^2\, dz} \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots), \end{cases}$$

(10) $$\alpha_k = \frac{\displaystyle\int_a^b (b - z)(z - a) f'(z)\, z [P_k(z)]^2\, dz}{\displaystyle\int_a^b (b - z)(z - a) f'(z) [P_k(z)]^2\, dz} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots).$$

2. Il reste à trouver les inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

On connaît d'abord, par les relations (3), les différences

(11) $$a_{k+1} - a_k = \frac{A_k}{(b - x_k)(x_k - a)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour achever la détermination des a_k, il faut recourir à l'une des équations (1). En choisissant, pour plus de simplicité, la première ($k = 0$), on a

(12) $$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b \varphi(x)\, dx = (b - a) a_{n+1} \\ \qquad\qquad - \dfrac{A_1}{b - x_1} - \dfrac{A_2}{b - x_2} - \ldots - \dfrac{A_n}{b - x_n}. \end{cases}$$

Cette équation fera connaître a_{n+1}, et l'on trouve ensuite tous les a_k à l'aide de (11).

Des combinaisons et réductions faciles fournissent, du reste, les formules suivantes :

$$(13)\quad \begin{cases} (b-a)[a_1 - f(a)] \\ \quad = \displaystyle\int_a^b (b-x)f'(x)\,dx - \frac{A_1}{x_1-a} - \frac{A_2}{x_2-a} - \ldots - \frac{A_n}{x_n-a}, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} (b-a)[a_{k+1} - f(x_k)] \\ \quad = -\displaystyle\int_a^{x_k} (x-a)f'(x)\,dx \\ \qquad + \dfrac{A_1}{b-x_1} + \dfrac{A_2}{b-x_2} + \ldots + \dfrac{A_k}{b-x_k} \\ \qquad + \displaystyle\int_{x_k}^b (b-x)f'(x)\,dx \\ \qquad - \dfrac{A_{k+1}}{a_{k+1}-a} - \dfrac{A_{k+2}}{a_{k+2}-a} - \ldots - \dfrac{A_n}{x_n-a} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(15)\quad \begin{cases} (b-a)[f(b) - a_{n+1}] \\ \quad = \displaystyle\int_a^b (x-a)f'(x)\,dx - \frac{A_1}{b-x_1} - \frac{A_2}{b-x_2} - \ldots - \frac{A_n}{b-x_n}, \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} (b-a)[f(x_k) - a_k] \\ \quad = \displaystyle\int_a^{x_k} (x-a)f'(x)\,dx \\ \qquad - \dfrac{A_1}{b-x_1} - \dfrac{A_2}{b-x_2} - \ldots - \dfrac{A_{k-1}}{b-x_{k-1}} \\ \qquad - \displaystyle\int_{x_k}^b (b-x)f'(x)\,dx \\ \qquad + \dfrac{A_k}{x_k-a} + \dfrac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a} + \ldots + \dfrac{A_n}{x_n-a} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Le problème proposé est ainsi résolu complètement; il nous reste seulement à démontrer que les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont comprises respective

ment dans les intervalles formés par

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_n),\quad f(b).$$

Remarquons d'abord qu'on a évidemment (11)

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}.$$

Ensuite nous observons que l'équation qui nous a servi de point de départ peut s'écrire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{G}_{2n}(x)\,dx,$$

en désignant par $\varphi(x)$ une fonction discontinue, non décroissante, définie de la manière suivante :

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = a_1 & \text{pour} \quad a < x < x_1, \\ \varphi(x) = a_2 & \text{»} \quad x_1 < x < x_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi(x) = a_n & \text{»} \quad x_{n-1} < x < x_n, \\ \varphi(x) = a_{n+1} & \text{»} \quad x_n < x < b. \end{cases}$$

On a, par conséquent,

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

On en conclut que la différence

$$f(x) - \varphi(x)$$

doit changer de signe au moins $2n+1$ fois dans l'intervalle (a, b).

En effet, si l'on suppose que le nombre l des changements de signe soit inférieur à $2n+1$, donc

$$l \leqq 2n,$$

et que ces changements de signe se produisent pour

$$x = \mathrm{X}_1,\qquad x = \mathrm{X}_2,\qquad \ldots,\qquad x = \mathrm{X}_l,$$

il est clair qu'en posant

$$G(x) = (x - X_1)(x - X_2)\ldots(x - X_l),$$

la fonction

$$[f(x) - \varphi(x)]\, G(x)$$

aurait un signe constant dans l'intervalle (a, b). Or, $G(x)$ étant un polynôme de degré $2n$ au plus, on doit avoir

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\, G(x)\, dx = 0,$$

ce qui est impossible. La supposition $l \leqq 2n$ est donc inadmissible et

$$f(x) - \varphi(x)$$

doit changer de signe au moins $2n + 1$ fois dans l'intervalle (a, b). Or, si l'on construit les lignes

$$y = f(x),$$
$$y = \varphi(x),$$

et qu'on se rappelle que $f(x)$ est non décroissant, on voit immédiatement que l ne peut pas être supérieur à $2n + 1$ et qu'on a, par conséquent, $l = 2n + 1$; ensuite, il est clair qu'on a nécessairement

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} f(a) < \varphi(a), \\ \varphi(x_k - \varepsilon) < f(x_k) < \varphi(x_k + \varepsilon) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ \varphi(b) < f(b), \end{array}\right.$$

ε étant une quantité positive suffisamment petite. Or ces inégalités expriment précisément la propriété qu'il s'agissait de démontrer.

4. D'après ce qu'on vient de voir, les premiers membres des formules (13), (14), (15) et (16) sont positifs. On peut démontrer aussi directement que les se-

conds membres sont positifs. C'est là une conséquence immédiate des inégalités

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_a^{x_k}(x-a)f'(x)\,dx > \frac{A_1}{b-x_1}+\frac{A_2}{b-x_2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{b-x_{k-1}} & (k=1,2,\ldots,n+1),\\[2ex]
\displaystyle\int_a^{x_k}(x-a)f'(x)\,dx < \frac{A_1}{b-x_1}+\frac{A_2}{b-x_2}+\ldots+\frac{A_k}{b-x_k} & (k=1,2,\ldots,n);
\end{cases}
$$

$$
(20)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\int_{x_k}^{b}(b-x)f'(x)\,dx < \frac{A_k}{x_k-a}+\frac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a}+\ldots+\frac{A_n}{x_n-a} & (k=1,2,\ldots,n),\\[2ex]
\displaystyle\int_{x_k}^{b}(b-x)f'(x)\,dx > \frac{A_{k+1}}{x_{k+1}-a}+\frac{A_{k+2}}{x_{k+2}-a}+\ldots+\frac{A_n}{x_n-a} & (k=0,1,2,\ldots,n).
\end{cases}
$$

(On doit prendre $x_0=a$, $x_{n+1}=b$ dans ces formules). On peut les établir de la manière suivante. Soit

$$
(21)\qquad m(x)=\int_a^x (x-a)f'(x)\,dx,
$$

$n(x)$ sera une fonction non décroissante et $m(a)=0$. Définissons ensuite une seconde fonction discontinue et non décroissante, ainsi qu'il suit :

$$
\begin{aligned}
&\mu(x)=0 && \text{lorsque } a<x<x_1,\\
(22)\quad &
\begin{cases}
\mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1} & \text{»}\quad x_1<x<x_2,\\[2ex]
\mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\dfrac{A_2}{b-x_2} & \text{»}\quad x_2<x<x_3,\\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{»}\quad \ldots\ldots\ldots,\\[1ex]
\mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\ldots+\dfrac{A_{n-1}}{b-x_{n-1}} & \text{»}\quad x_{n-1}<x<x_n,\\[2ex]
\mu(x)=\dfrac{A_1}{b-x_1}+\ldots+\dfrac{A_n}{b-x_n} & \text{»}\quad x_n<x<b.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Par une intégration par parties, on trouve

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (b-x)^k m(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{k+1}\int_b^a (b-x)^{k+1}(x-a)f'(x)\,dx, \end{cases}$$

et, d'après la définition même de la fonction $\mu(x)$, on trouve

$$(24)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (b-x)^{k+1}\mu(x)\,dx \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{k+1}[A_1(b-x_1)^k + A_2(b-x_2)^k + \ldots + A_n(b-x_n)^k]. \end{cases}$$

En faisant attention à la formule (4), on en conclut

$$\int_a^b [m(x)-\mu(x)](b-x)^k\,dx = 0 \qquad (k=0,1,2,\ldots,2n-1);$$

d'où il suit que la différence

$$m(x)-\mu(x)$$

doit changer de signe au moins $2n$ fois dans l'intervalle (a, b). Mais, d'après la nature de la fonction $\mu(x)$, on voit facilement que le nombre des changements de signe doit être exactement égal à $2n$ et qu'on a, en outre,

$$\mu(x_k-\varepsilon) < m(x_k) < \mu(x_k-\varepsilon) \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$
$$\mu(b) < m(b).$$

Or ce sont là précisément les inégalités (19).

Pour démontrer les inégalités (20), nous posons

$$(25)\qquad n(x) = \int_a^b (b-x)f'(x)\,dx$$

et

$$(26)\quad \begin{cases} \nu(x) = \dfrac{A_1}{x_1 - a} + \dfrac{A_2}{x_2 - a} + \ldots + \dfrac{A_n}{x_n - a} & \text{lorsque } a < x < x_1, \\ \nu(x) = \dfrac{A_2}{x_2 - a} + \ldots + \dfrac{A_n}{x_n - a} & \quad \text{»} \quad a_1 < x < x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots, \\ \nu(x) = \dfrac{A_n}{x_n - a} & \quad \text{»} \quad x_{n-1} < x < x_n, \\ \nu(x) = 0 & \quad \text{»} \quad x_n < x < b. \end{cases}$$

Les deux fonctions sont non croissantes et

$$n(b) = \nu(b) = 0.$$

Ensuite on trouve facilement

$$(27)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (x-a)^k n(x)\,dx \\ \quad = \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\int_a^b (x-a)^{k+1}(b-x) f'(x)\,dx \end{cases}$$

et

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (x-a)^k \nu(x)\,dx \\ \quad = \dfrac{1}{k+1} [A_1(x_1-a)^k + A_2(x_2-a)^k + \ldots + A_n(x_n-a)^k]. \end{cases}$$

On voit par là qu'on a

$$\int_a^b [n(x) - \nu(x)](x-a)^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots 2n-1);$$

d'où il suit que la différence

$$n(x) - \nu(x)$$

doit changer de signe au moins $2n$ fois dans l'intervalle (a, b). Mais, comme tout à l'heure, il est facile de voir que le nombre des changements de signe doit être

exactement égal à $2n$, et qu'on a nécessairement

$$\nu(x_k+\varepsilon) < n(x_k) < \nu(x_k-\varepsilon) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$
$$\nu(a) < n(a),$$

ce qui équivaut aux inégalités (20).

SUR DEUX CLASSES REMARQUABLES DE LIGNES PLANES;

PAR M. E. CESARO.

---

1. Nous allons étudier les courbes planes douées d'un *pôle* tel, que *le deuxième rayon de courbure soit partagé dans un rapport constant avec le rayon vecteur*. Soient O le pôle, α et β ses coordonnées par rapport à la tangente et à la normale à la ligne (M), au point M. On sait que les dérivées de α et β, par rapport à l'arc de (M), sont

$$(1) \qquad \alpha' = \frac{\beta-\rho}{\rho}, \qquad \beta' = -\frac{\alpha}{\rho}.$$

En coordonnées polaires, ces équations deviennent

$$(2) \qquad u' = -\cos\omega, \qquad \omega' = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sin\omega}{u}.$$

Supposons que le premier centre de courbure partage dans le rapport constant de $n-1$ à $n+1$ le segment intercepté par OM sur la normale à la développée de (M), à partir du deuxième centre de courbure. Cela s'exprime en écrivant

$$(3) \qquad \rho' = \frac{n-1}{n+1}\,\frac{\alpha}{\beta},$$

si l'on observe que la longueur du deuxième rayon de courbure est $\rho\rho'$. Or, en vertu de (1) et (2), on peut

écrire

(4) $$uu' = \beta'\rho = -\alpha.$$

Cela étant, les égalités (3) et (4) nous donnent

$$\beta\rho' + \beta'\rho = \frac{2}{n+1}\,uu';$$

puis, en intégrant,

(5) $$u^2 - R^2 = (n+1)\beta\rho,$$

pourvu que n soit fini et différent de -1.

2. L'égalité (5) exprime une remarquable propriété de nos lignes. Appelons *cercle directeur* le cercle de rayon R, dont le centre est au pôle. A cause de (5), la polaire de M par rapport à ce cercle a pour équation

$$\alpha x + \beta y = (n+1)\beta\rho.$$

Elle détache donc de la normale un segment $(n+1)\rho$. Conséquemment, *le rayon de courbure, en tout point* M, *est proportionnel au segment de normale compris entre* M *et la polaire de ce point, par rapport au cercle directeur*. Cette propriété nous indique immédiatement, parmi toutes les lignes que nous considérons, deux classes remarquables, caractérisées par leur cercle directeur. Lorsque celui-ci devient une *droite,* on a les *lignes dont le rayon de courbure est proportionnel au segment de normale, intercepté par une droite fixe*. Ces lignes ont été étudiées par MM. Mannheim, Ribaucour, Dubois [1]. Lorsque le cercle directeur se réduit à un *point,* la polaire de M n'est autre que la perpendiculaire à OM, élevée par O. On a donc les courbes jouissant de la pro-

---

[1] *Nouvelle correspondance mathematique,* t. VI, p. 158 et 224.

priété suivante : *La projection du centre de courbure sur le rayon vecteur partage celui-ci dans un rapport constant.* Ce sont les courbes appelées *spirales sinusoïdes* par M. Haton de la Goupillière (¹).

3. Divisons (4) par (5). Il vient

$$\frac{uu'}{u^2 - R^2} = \frac{1}{n+1}\frac{\beta'}{\beta},$$

d'où

$$(6) \qquad u^2 - R^2 = (n+1)\,c^2\left(\frac{\beta}{c}\right)^{\frac{2}{n+1}},$$

pourvu que n, différent de zéro et de -1, soit fini. Puis, par substitution dans (5),

$$(7) \qquad \rho = c\left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{n-1}{n+1}}.$$

On peut donc écrire, en vertu de (6) et de (7),

$$\beta = c\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{n+1}{n-1}},$$

$$\alpha = c\sqrt{\frac{R^2}{c^2} + (n+1)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{2}{n-1}} - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{-2\frac{n+1}{n-1}}}.$$

Dès lors, l'intégration de (3) nous donne immédiatement

$$(8) \qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{R^2}{c^2}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} + (n+1)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Telle est l'*équation intrinsèque* générale de nos lignes.

(¹) *Nouvelles Annales*, 1876. Lisez, au sujet de ces courbes, les renseignements bibliographiques fournis par MM. Bassani et Brocard dans le *Journal de Battaglini*, 1886, et dans les *Nouvelles Annales*, même année.

4. La discussion des égalités (6) et (7) conduit aisément à quelques remarques intéressantes. En laissant de côté le cas d'un pôle situé à l'infini, que l'on examinera à part, on voit que, si l'*indice* n est différent de l'unité, en valeur absolue, *la courbe ne peut rencontrer sa directrice circulaire sans inflexion ou rebroussement*. Dans tous les cas, *la rencontre est nécessairement orthogonale*. On peut affirmer, en outre, que : 1° *les courbes dont l'indice est inférieur à* — 1 *ne rencontrent pas leur directrice;* 2° *les courbes dont l'indice est supérieur à l'unité n'ont pas de rebroussement, mais elles peuvent avoir des points d'inflexion, nécessairement distribués sur la circonférence directrice;* 3° *les courbes dont l'indice est, en valeur absolue, une fraction propre, n'ont pas d'inflexion : elles ne peuvent subir de rebroussement ailleurs que sur la directrice.* En particulier, les spirales sinusoïdes, dont l'indice est inférieur à — 1, ne contiennent pas le pôle. Les spirales, dont l'indice est supérieur à — 1, peuvent passer par le pôle, à la condition d'y subir un rebroussement ou une inflexion, suivant que la valeur absolue de l'indice est ou n'est pas une fraction propre. Dans tous les cas, de telles singularités ne peuvent se présenter ailleurs qu'au pôle.

5. Chaque valeur de l'indice sert à définir une *famille* de courbes, qui renferme toujours une *ligne de Ribaucour* et une *spirale sinusoïde*. Pour $n = -2$, la définition même de nos courbes se confond avec la construction donnée par Maclaurin pour obtenir le deuxième centre de courbure d'une conique. La construction de Maclaurin nous dit, en outre, que le *pôle* est ici le centre de la courbe. C'est ce qui résulte, d'ailleurs, de notre article *Sur la courbure des coniques*. Ainsi, l'indice — 2 définit la famille des *coniques*, et l'on peut être

curieux de connaître quels sont, dans cette famille, les représentants des deux classes que nous étudions. Dans ce but, remarquons d'abord que α s'annule et β devient égal à l'un des demi-axes, a ou b, lorsque la normale passe par le centre. L'équation (6) devient alors

$$a^4 - R^2 a^2 + c^4 = 0, \qquad b^4 - R^2 b^2 + c^4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(9) \qquad R^2 = a^2 + b^2, \qquad c^2 = ab.$$

La directrice circulaire d'une conique est donc la circonférence circonscrite au rectangle des tangentes aux sommets. C'est le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à la conique. Elle devient une droite, lorsque le centre s'éloigne à l'infini : la conique est alors une parabole. Par conséquent, *la ligne de Ribaucour, d'indice* — 2, *est une parabole.* On rencontre encore cette courbe hors de la famille des coniques, avec l'indice $-\frac{1}{2}$; mais alors elle admet le pôle pour foyer. Pour que R soit nul, il faut que $b = a\sqrt{-1}$, d'où il suit que *la spirale sinusoïde, d'indice* — 2, *est une hyperbole équilatère.* Si l'on porte dans (8) les résultats (9), en faisant $n = -2$, on trouve que *l'équation intrinsèque des coniques est*

$$(10) \qquad s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}.$$

6. Une famille bien simple est définie par l'indice 1. L'équation (7) nous dit qu'il s'agit d'une famille de *cercles*. D'après cela, une circonférence de cercle peut toujours être considérée comme appartenant à une classe quelconque, suivant la position qu'elle occupe par rapport au pôle. Soient a la distance de son centre au pôle et b son rayon. Nous pouvons prendre, sur la circonférence, un

point tel que l'on ait $\alpha = a$, $\beta = b$: l'équation (5) nous donne alors $R^2 = a^2 - b^2$. La circonférence directrice coupe donc orthogonalement la circonférence donnée. C'est le seul cas où une pareille rencontre puisse avoir lieu sans inflexion ni rebroussement. On peut considérer une circonférence comme une spirale sinusoïde, lorsqu'elle passe par le pôle, et comme une ligne de Ribaucour, lorsque le pôle est à l'infini : dans ce cas la directrice est un diamètre quelconque de la circonférence.

7. Certes, la plus intéressante famille répond à l'indice o. Elle se compose de toutes les courbes jouissant de cette curieuse propriété : *Le centre de courbure, en un point* M, *est à l'intersection de la normale avec la polaire de* M, *par rapport à un cercle invariable.* Nous avons rencontré ces courbes dès nos premiers essais de géométrie intrinsèque ([1]). On ne peut leur appliquer la formule (6), parce que le choix même de la constante a été fait de manière qu'elle cesse d'être *arbitraire* pour $n = 0$. Pour rétablir la généralité des résultats, il faut affecter d'un facteur constant, arbitraire, un membre de (6), et l'on trouve alors une équation de la forme

$$\rho^2 = as^2 + 2bs + c,$$

qui représente, pour $a < -1$, une *hypocycloïde;* pour $a = -1$, une *cycloïde;* pour $-1 < a < 0$, une *épicycloïde;* pour $a = 0$, une *développante de cercle;* pour $a > 0$, deux autres familles de lignes, qui se distinguent par le signe de $b^2 - ac$. Lorsque $b^2 - ac = 0$, on a une *spirale logarithmique.* Le rayon du cercle directeur, réel

---

([1]) *Mathesis*, p. 25; 1887.

ou imaginaire, est

$$R = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{1 + a}.$$

Il est *infini* pour $a = -1$, *nul* pour $b^2 - ac = 0$. Donc *la ligne de Ribaucour d'indice* 0 *est une cycloïde. La spirale sinusoïde d'indice* 0 *est une spirale logarithmique.* Il est vrai qu'on rencontre encore une épicycloïde parmi les spirales sinusoïdes : c'est le limaçon de Pascal. Mais cette courbe se présente alors avec l'indice $\frac{1}{2}$, et le pôle est au point de rebroussement de la courbe. La parabole du second degré et le limaçon de Pascal sont les seules courbes susceptibles de deux indices différents. Le cercle et la droite ont une infinité de pôles, et appartiennent, par conséquent, à toutes les classes; mais leurs indices sont constamment 1 et -1.

8. La circonférence décrite sur le segment de normale, compris entre M et la polaire de ce point par rapport à la circonférence directrice, doit, par une propriété connue, rencontrer orthogonalement la directrice. Du reste, si l'on observe que l'équation du cercle considéré est

$$x^2 + y^2 = (n + 1)\rho y,$$

on en déduit sans peine le résultat énoncé. Dérivant la dernière équation, on obtient

$$\rho' y = \frac{n-1}{n+1} x.$$

A cause de (3), cette équation est vérifiée par les coordonnées du pôle. Donc, *la circonférence considérée touche son enveloppe aux extrémités d'une corde contenant le pôle.* D'autre part, il suffit de remarquer que les tangentes à la circonférence, aux extrémités dont il s'agit, sont également inclinées sur la corde, pour pou-

voir affirmer que *la circonférence considérée est enveloppée par deux courbes inverses.* Limitons-nous, par exemple, aux cas des lignes cycloïdales et des coniques, et signalons le rapprochement inattendu que les propriétés précédentes établissent entre ces deux importantes familles. Pour $n = 0$, on trouve que *les circonférences décrites sur les rayons de courbure d'une ligne cycloïdale, pris comme diamètres, rencontrent orthogonalement le cercle directeur. Elles enveloppent une seconde ligne inverse de la ligne donnée.* Cette dernière propriété a été remarquée par M. Mennesson (¹). De même, pour $n = -2$, nous voyons que *les symétriques, par rapport aux tangentes, des circonférences décrites sur les rayons de courbure d'une conique, pris comme diamètres, rencontrent orthogonalement le cercle directeur et enveloppent une inverse de conique.* Ajoutons que, pour les coniques, le centre de courbure, en un point M, est symétrique, par rapport à M, du point de rencontre de la normale avec la polaire de M, relativement au cercle directeur. C'est encore une analogie avec les lignes cycloïdales.

9. *Lignes de Ribaucour.* — En faisant tendre c vers zéro ou vers l'infini, suivant la valeur de n, on peut faire en sorte que $c^{\frac{2n}{n-1}}$ augmente indéfiniment, en même temps que R; mais le rapport de ces quantités sera la quantité finie et déterminée $a^{\frac{n+1}{n-1}}$, si l'on pose

$$R = c\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

(¹) *Mathesis*, question 461; 1885.

L'équation (8) devient alors

$$(11)\qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

Telle est l'*équation intrinsèque des lignes de Ribaucour*.

10. Il convient de remarquer que l'on peut bien substituer, pour ces lignes, la *directrice* à la polaire de M, par rapport au cercle directeur. C'est, en effet, cette dernière droite qui doit intercepter sur la normale un segment proportionnel à ρ; mais il est clair qu'il en est de même de la directrice, puisque celle-ci est située à moitié distance entre le point M et la limite de sa polaire. Du reste, q étant le segment de normale intercepté par la perpendiculaire à OM, située à la distance $u - R$ de M (et qui touche, par conséquent, la circonférence directrice et tend à se confondre avec elle lorsque R croît indéfiniment), on a

$$u - R = q \sin\omega, \qquad \lim \frac{u}{R} = 1.$$

Par suite, la formule (5) devient

$$\left(1 - \frac{R}{u}\right) q = (n+1)\rho;$$

puis, pour R infini,

$$q = \frac{n+1}{2}\rho,$$

ce qui est la définition habituelle des lignes de Ribaucour. Remarquons encore que la formule (7) donne,

pour R infini,

$$\rho^{-\frac{n+1}{n-1}} = \lim \frac{u \sin \omega}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = \lim \frac{u}{R} \lim \frac{R \sin \omega}{c^{\frac{2n}{n-1}}} = a^{-\frac{n+1}{n-1}} \sin \omega,$$

d'où

$$\rho = a(\sin \omega)^{-\frac{n-1}{n+1}}, \qquad \lim(u - R) = \frac{n+1}{2} a (\sin \omega)^{\frac{2}{n+1}}.$$

De là on déduit sans peine que : 1° *les lignes de Ribaucour ne peuvent rencontrer leur directrice que sous un angle droit, et à la condition d'y subir une inflexion ou un rebroussement, ce qui ne saurait arriver ailleurs que sur la directrice ;* 2° *il y a rebroussement, et pas d'inflexion, pour les lignes à indice moindre que l'unité, en valeur absolue : inflexion, et pas de rebroussement, pour les lignes dont l'indice surpasse l'unité ;* 3° *les lignes dont l'indice est inférieur à* — 1 *ne rencontrent pas la directrice,* et, par suite, *elles ne souffrent ni rebroussement ni inflexion.* On vérifie aisément ces circonstances sur les courbes particulières que nous allons obtenir.

11. M. Ribaucour a rencontré ces lignes dans ses recherches sur les *élassoïdes* [1]. Pour les valeurs entières de $\frac{2}{n+1}$, il distingue quatre genres : *cycloïdal, circulaire, parabolique, caténoïdique.* Ces genres répondent aux valeurs de $\frac{2}{n+1}$ qui sont, respectivement, positives et paires, positives et impaires, négatives et paires, négatives et impaires. Pour $n = 1$, nous savons déjà que l'on doit avoir un *cercle.* Pour $n = 0$, l'équation (11) devient

$$\rho^2 + s^2 = a^2 :$$

---

[1] Voyez, dans les *Mémoires couronnés* de l'Académie de Belgique, t. XLIV, l'*Étude des élassoïdes*, par M. Ribaucour.

elle représente une *cycloïde;* ce qui devrait être. Pour $n = -3$, la même équation devient

$$\rho = a + \frac{s^2}{a}:$$

elle représente une *chaînette*. Enfin, pour $n = -2$, on obtient

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

On sait déjà que cette équation doit représenter une *parabole*. Pour n infini, on obtiendrait l'équation

$$\rho = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}}\right),$$

qui représente une chaînette d'égale résistance; mais on se tromperait si l'on croyait que cette courbe appartient à la classe des lignes de Ribaucour. Il ne faut pas oublier, en effet, que l'équation (11) a été obtenue en supposant n fini. Il conviendrait d'étudier à part les lignes dont l'indice est infini : leur courbure varie comme la distance du pôle à la tangente. Leur équation intrinsèque cesse d'avoir la forme (8) : il s'y introduit, sous le signe d'intégration, une fonction logarithmique de ρ.

12. Pour $n = 3$ et pour $n = -5$, on obtient les courbes

$$s = 2\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{4} - 1}}, \qquad s = \frac{2}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Il est remarquable que ces équations, par le simple changement de s en $\frac{2}{3}s$ et $2s$, respectivement, deviennent les équations de la lemniscate de Bernoulli et de l'hy-

perbole équilatère. Faisons, pour finir, $n = -\frac{1}{3}$. L'équation (11) ne prend pas une forme très simple; mais nous trouverons, parmi les *parallèles* à la courbe demandée, une courbe connue. Rappelons, d'abord, que les coordonnées intrinsèques, ρ et s, d'une parallèle à une courbe donnée, sont

$$\rho - h, \quad s - h\int \frac{ds}{\rho},$$

h étant la *distance* des deux courbes. Il en résulte que, si

$$s = \int f(\rho)\, d\rho$$

est l'équation d'une courbe, l'équation des lignes parallèles est

$$(12) \qquad s = \int \frac{f(\rho + h)}{\rho + h}\, \rho\, d\rho.$$

En particulier, les courbes parallèles à celle que nous considérons sont représentées par l'équation intrinsèque

$$s = -\frac{1}{2}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(h+\rho)(a-h-\rho)}}.$$

Pour $h = \frac{a}{2}$, il vient

$$\rho^2 + 4s^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Cette équation représente une *hypocycloïde à quatre rebroussements,* engendrée par un point d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{12}$, roulant sans glisser à l'intérieur d'une circonférence quadruple. *La ligne de Ribaucour d'indice* $-\frac{1}{3}$ *est* donc *parallèle à une certaine hypocycloïde.*

13. *Spirales sinusoïdes.* — Il suffit de faire $R = 0$,

dans (8), pour avoir l'*équation intrinsèque des spirales sinusoïdes :*

$$(13)\qquad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

On peut établir directement les propriétés de ces lignes, en partant de la propriété fondamentale, qui se traduit par l'égalité

$$(14)\qquad u = (n+1)\rho \sin\omega.$$

Soit θ l'angle du rayon vecteur avec une direction fixe, de sorte que

$$(15)\qquad \theta' = -\frac{\sin\omega}{u}.$$

A cause de (14), les formules (2) et (15) deviennent

$$(16)\qquad \omega' = -\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{\rho}, \qquad \theta' = -\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\rho};$$

d'où, par comparaison, on déduit

$$(17)\qquad \omega = n\theta,$$

pourvu qu'on choisisse convenablement la direction fixe. La propriété (17) justifie la dénomination de *lignes à inflexion proportionnelle,* employée par M. Laquière [1].

14. Si l'on divise par (14) la première des équations (2), en tenant compte de (16), on obtient

$$\frac{u'}{u} = \frac{\omega'}{n} \cot\omega,$$

d'où

$$(18)\qquad u^n = a^n \sin\omega.$$

---

[1] *Nouvelles Annales,* 1883.

L'équation polaire des spirales sinusoïdes est donc, à cause de (17),

$$u^n = a^n \sin n\theta.$$

En vertu de (18), l'équation (14) donne

(19) $$\rho = \frac{1}{n+1}\,\frac{a^n}{u^{n-1}}.$$

De même, la première des équations (2) donne, par intégration,

(20) $$s = -\int \frac{a^n\,du}{\sqrt{a^{2n} - u^{2n}}}.$$

Enfin, l'élimination de u nous reconduit à l'équation (13), abstraction faite de la valeur du paramètre a.

15. Si $n = 0$, la première des équations (16) prouve que l'on a une *spirale logarithmique*, de pôle O. On voit de même que, pour $n = 1$ et pour $n = -1$, on a un *cercle* et une *droite*. Si $n = -2$, l'équation (13) devient

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

et l'on sait qu'elle représente une *hyperbole équilatère*, de centre O. Si $n = -\frac{1}{2}$, on obtient, au signe près,

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}:$$

c'est l'équation d'une *parabole*, dont O est le foyer. Pour $n = \frac{1}{2}$, l'équation (13) devient

$$9\rho^2 + s^2 = 4a^2.$$

Elle représente un *limaçon de Pascal*, engendré par

le roulement d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{4}$, sur une circonférence égale. Pour $n = 2$, on a

$$s = 3\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^4 - 1}}.$$

C'est l'équation d'une *lemniscate de Bernoulli*. Enfin, pour $n = \frac{1}{3}$, on trouve une parallèle aux courbes représentées par l'équation

$$s = -2\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(h+\rho)(a-h-\rho)}}.$$

Si $h = \frac{a}{2}$, il vient

$$4\rho^2 + s^2 = a^2 :$$

c'est une *épicycloïde à deux rebroussements*, engendrée par le roulement d'une circonférence, de rayon $\frac{a}{6}$, sur une circonférence double. *La spirale sinusoïde, d'indice* $\frac{1}{3}$, *est* donc *parallèle à une certaine épicycloïde.*

16. Les spirales sinusoïdes se déduisent les unes des autres par l'opération qui engendre les *podaires*. On sait que les coordonnées intrinsèques, s et ρ, de la podaire d'une courbe, par rapport à un pôle O, sont

$$\int \frac{u\, ds}{\rho}, \quad \frac{u^2}{2u - \rho \sin\omega}.$$

Dans le cas actuel, ces expressions deviennent

$$-(n+1)\int \frac{u^n\, du}{\sqrt{a^{2n} - u^{2n}}}, \quad \frac{n+1}{2n+1}\, u.$$

On trouve ensuite, par élimination de u, une équation que l'on peut déduire de (13) par le changement de n en $\frac{n}{n+1}$. Donc, *la podaire d'une spirale d'indice n est une*

spirale d'indice $\frac{n}{n+1}$. En particulier, si l'on applique ce théorème aux courbes considérées précédemment, on voit que : 1° la podaire d'une spirale logarithmique, par rapport au pôle, est une spirale logarithmique ; 2° la podaire d'une parabole, par rapport au foyer, est une droite ; 3° la podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points, est un limaçon de Pascal ; 4° la podaire d'une hyperbole équilatère, par rapport au centre, est une lemniscate de Bernoulli ; 5° la podaire d'un limaçon de Pascal, par rapport à son point de rebroussement, est parallèle à une épicycloïde à deux rebroussements. Plus généralement, si n est un nombre entier, la spirale d'indice $\frac{1}{n}$ est la $(n-1)^{\text{ième}}$ podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points ; et la spirale d'indice $\frac{2}{2n+1}$ est la $n^{\text{ième}}$ podaire d'une hyperbole équilatère, par rapport à son centre.

17. Mais il y a une transformation très simple, qui permet de déduire l'une de l'autre deux spirales sinusoïdes quelconques. Cette transformation, proposée par Chasles, a été étudiée par MM. Roberts, Faure, d'Ocagne [1]. La *transformation d'indice* ν fait correspondre, au point dont l'affixe est z, le point dont l'affixe ζ est lié à z par l'égalité

$$a^{\nu-1}\zeta = z^{\nu}.$$

Le résultat que nous allons obtenir est d'une extrême évidence, si l'on fait attention à l'équation polaire des spirales ; mais nous voulons, ici, nous servir exclusive-

---

(1) Voyez, dans le *Journal de Teixeira*, 1885, l'étude de M. d'Ocagne *Sur une transformation polaire des courbes planes*.

ment des méthodes intrinsèques. Les coordonnées du transformé de M, par rapport à la tangente et à la normale à (M), en M, sont

$$x = u\cos\omega - \frac{u^\nu}{a^{\nu-1}}\cos[\omega-(\nu-1)\theta],$$

$$y = u\sin\omega - \frac{u^\nu}{a^{\nu-1}}\sin[\omega-(\nu-1)\theta].$$

On en déduit, pour exprimer leurs variations absolues dans le plan,

(21) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\delta x}{ds} &= \nu\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-1}\cos(\nu-1)\theta, \\ \frac{\delta y}{ds} &= -\nu\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-1}\sin(\nu-1)\theta. \end{aligned}\right.$$

On voit donc que l'angle des tangentes aux deux lignes est $\pi-(\nu-1)\theta$, d'où il suit que *les tangentes en deux points correspondants concourent sur la circonférence déterminée par ces points et par le pôle*. Élevant au carré et ajoutant les égalités (21), on trouve, pour exprimer l'arc de la transformée,

$$a^{\nu-1}s_1 = \nu\int u^{\nu-1}\,ds.$$

Pour avoir le rayon de courbure, les mêmes égalités donnent, après une nouvelle dérivation,

$$a^{\nu-1}\rho_1 = \frac{\nu u^\nu \rho}{u+(\nu-1)\rho\sin\omega}.$$

Dans le cas particulier des spirales sinusoïdes, ces formules deviennent, en vertu de (19) et (20),

$$s_1 = -\nu a^{n-\nu+1}\int\frac{u^{\nu-1}\,du}{\sqrt{a^{2n}-u^{2n}}}, \qquad \rho_1 = \frac{\nu a}{n+\nu}\left(\frac{u}{a}\right)^{\nu-n};$$

puis, par élimination de u, on arrive à la proposition

évidente : *La transformée d'indice* ν *d'une spirale d'indice* n *est une spirale d'indice* $\frac{n}{\nu}$. En particulier, la podaire d'une spirale d'indice n peut se déduire de cette courbe par une transformation d'indice $n+1$.

18. Remarquons que la transformation d'indice -1 ne diffère pas essentiellement de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Donc, *deux spirales sinusoïdes, aux indices égaux et de signes contraires, sont deux courbes inverses*. Exemples : 1° deux spirales logarithmiques ; 2° droite et cercle ; 3° parabole et limaçon de Pascal ; 4° hyperbole équilatère et lemniscate de Bernoulli. Une autre transformation particulière, remarquée par Chasles, est celle d'indice 2. On voit immédiatement que la transformée d'une droite est une parabole, la transformée d'un cercle est un limaçon de Pascal, etc. Ce dernier théorème, dû à Chasles, a été retrouvé et précisé par M. d'Ocagne, dans la Note citée. On voit encore que, par une transformation d'indice 4, on saurait déduire une parabole d'une hyperbole équilatère, un limaçon de Pascal d'une lemniscate de Bernoulli ; etc. Pour finir, nous remarquerons que toutes ces courbes se déduisent aisément du cercle, en prenant comme pôle un point de la circonférence, et la tangente en ce point comme axe polaire. En effet, *toute spirale d'indice* n *dérive du cercle par une transformation d'indice* $\frac{1}{n}$.

19. Les géomètres ont déjà remarqué que les spirales sinusoïdes peuvent être parcourues par un mobile, attiré vers le pôle en raison inverse de la $(2n+3)^{\text{ième}}$ puissance de la distance, n étant l'indice de la courbe. Soit $\frac{a^{2n+4}}{u^{2n+3}}$ l'intensité de l'accélération totale, de sorte que, v

étant la vitesse, les accélérations tangentielle et centripète soient

$$(22)\qquad vv' = \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4}\alpha, \qquad \frac{v^2}{\rho} = \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4}\beta.$$

Divisant membre à membre, on a

$$\frac{v'}{v} = \frac{\alpha}{\beta\rho} = -\frac{\beta'}{\beta},$$

d'où

$$v = \frac{k}{\beta}.$$

D'après cela, les égalités (22) donnent

$$(23)\qquad \rho = \frac{k^2}{\beta^3}\left(\frac{u}{a}\right)^{2n+4}.$$

Or, si l'on observe la relation (4), l'égalité (23) prend la forme

$$(24)\qquad \left(\frac{a}{u}\right)^{2n+4} uu' = \frac{k^2\beta'}{\beta^3};$$

d'où l'on déduit, en particulier,

$$(25)\qquad a^{2n+4}\beta^2 = (n+1)\,k^2 u^{2n+2},$$

pourvu que n diffère de -1. Dès lors, l'égalité (23) devient

$$\beta\rho = \frac{u^2}{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad u = (n+1)\,\rho\sin\omega:$$

c'est l'égalité (14), qui suffit pour définir les spirales sinusoïdes, d'indice n.

20. Évidemment, ce ne sont là que des cas fort particuliers de toutes les trajectoires possibles. Ainsi, en nous bornant au cas de $n = -2$, nous obtenons seulement l'hyperbole équilatère; mais nous retrouvons toute la famille des coniques si, dans l'intégration de (24), nous n'égalons plus à zéro la constante arbitraire. Il

vient alors, au lieu de (25),

$$u^2 = R^2 - \frac{c^4}{\beta^2},$$

et l'on détermine les valeurs des constantes R et c, en fonction des axes de la courbe, en observant que, pour $\alpha = 0$, la valeur commune de u et β est a ou b. Il en résulte

$$R^2 = a^2 + b^2, \qquad c^2 = ab.$$

Conséquemment,

$$\alpha = \sqrt{\frac{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}{a^2 + b^2 - u^2}}, \qquad \beta = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - u^2}}.$$

Puis, en vertu de (23),

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad s = -\int \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - u^2}{(a^2 - u^2)(u^2 - b^2)}}\, u\, du.$$

En éliminant u, nous retrouvons l'équation (10), qui représente toutes les coniques. On arrive au même résultat, lorsque $n = -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, le point O n'est plus le *centre*, mais bien un *foyer* de la conique. On obtient d'abord

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2au - u^2 - b^2}} = \frac{\beta}{b} = \sqrt{\frac{u}{2a - u}};$$

puis

$$\rho = \frac{(2au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad s = -\int \sqrt{\frac{2au - u^2}{2au - u^2 - b^2}}\, du.$$

Enfin, l'élimination de u nous reconduit à l'équation intrinsèque (10), et l'on peut démontrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs de n pour lesquelles ce fait soit possible.

ERRATA.

Même tome, p. 50 et 55, *mettre* lim *devant* $\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

SUR QUELQUES INTÉGRALES REMARQUABLES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

On lit, dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Ch. Hermite, le passage suivant qui termine le Chapitre relatif à l'intégration par parties (p. 260) :

« Tels sont donc jusqu'ici les divers types de fonctions pour lesquels on possède une méthode sûre d'intégration sous forme finie explicite. Bien d'autres, nous devons le dire, ne rentrent point dans ces méthodes; ainsi, par exemple, en posant

$$u = x \sin x + \cos x, \qquad v = \sin x - x \cos x,$$

on n'a aucun procédé pour trouver directement

$$\int \frac{x^2\, dx}{u^2} = \frac{v}{u},$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

$$\int \frac{b x^2\, dx}{(au + bv)^2} = -\frac{u}{au + bv}.$$

» Nous pourrions encore citer, en désignant toujours par a et b des constantes, cette intégrale

$$\int \frac{a\, dx}{[a + (ax + b)\tang x]^2} = \frac{\tang x}{a - (ax + b)\tang x}$$

dont on ne peut vérifier la valeur que par la différentiation. »

Je me propose de démontrer dans cette Note que le procédé d'intégration par parties, *joint à l'emploi de*

substitutions très simples, suffit pour obtenir la valeur des quatre intégrales précédentes. Je désignerai ces intégrales respectivement par A, B, C, D et je négligerai d'écrire les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

I. La différentiation de l'équation

$$u = x\sin x + \cos x$$

donne

$$x\cos x\,dx = du$$

et, par suite,

$$A = \int \frac{x}{\cos x}\frac{du}{u^2} = -\int \frac{x}{\cos x}\,d\left(\frac{1}{u}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$A = -\frac{x}{u\cos x} + \int \frac{1}{u}\,d\left(\frac{x}{\cos x}\right).$$

Or on a

$$d\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{u}{\cos^2 x}\,dx,$$

d'où, par conséquent,

$$A = -\frac{x}{u\cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\frac{x}{u\cos x} + \tan x = \frac{v}{u}.$$

II. De même on trouve, par un calcul analogue au précédent,

$$\begin{aligned}
B &= \int \frac{x}{\sin x}\frac{dv}{v^2} = -\int \frac{x}{\sin x}\,d\left(\frac{1}{v}\right) \\
&= -\frac{x}{v\sin x} + \int \frac{1}{v}\,d\left(\frac{x}{\sin x}\right) \\
&= -\frac{x}{v\sin x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{v\sin x} - \cot x = -\frac{u}{v}.
\end{aligned}$$

III. Pour calculer C, posons $au + bv = t$. Il en résulte

$$a\,du + b\,dv = x(a\cos x + b\sin x)\,dx = dt,$$

et, par suite,

$$\mathrm{C} = \int \frac{b x^2\,dx}{t^2} = \int \frac{b x}{a \cos x + b \sin x} \frac{dt}{t^2}$$
$$= -\int \frac{b x}{a \cos x + b \sin x}\, d\left(\frac{1}{t}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$\mathrm{C} = -\frac{b x}{(a \cos x + b \sin x) t} + \int \frac{1}{t}\, d\left(\frac{b x}{a \cos x + b \sin x}\right).$$

Cette dernière intégrale se réduit aisément à

$$\int \frac{b\,dx}{(a \cos x + b \sin x)^2},$$

pour laquelle les méthodes usuelles conduisent à la valeur

$$-\frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}.$$

Il en résulte

$$\mathrm{C} = -\frac{b x}{(a \cos x + b \sin x) t} - \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x}$$
$$= -\frac{u}{t} = -\frac{u}{a u + b v}.$$

On démontrerait de même la formule

$$\int \frac{a x^2\,dx}{(a u + b v)^2} = \frac{v}{a u + b v}.$$

IV. Enfin, en ce qui concerne l'intégrale D, nous l'écrirons d'abord, pour la simplicité des calculs, sous la forme

$$\int \frac{a \cos^2 x\,dx}{[a \cos x + (a x + b) \sin x]^2}.$$

Posant alors

$$a \cos x + (a x + b) \sin x = z,$$

on a

$$(ax + b)\cos x\, dx = dz$$

et, par suite,

$$D = \int \frac{a\cos x}{ax+b}\,\frac{dz}{z^2} = -\int \frac{a\cos x}{ax+b}\,d\left(\frac{1}{z}\right),$$

ou, en intégrant par parties,

$$D = -\int \frac{a\cos x}{(ax+b)z} + \int \frac{1}{z}\,d\left(\frac{a\cos x}{ax+b}\right).$$

La dernière intégrale se réduit aisément à

$$\int \frac{-a\,dx}{(ax+b)^2},$$

dont la valeur est

$$\frac{1}{ax+b}.$$

Il en résulte

$$D = -\frac{a\cos x}{(ax+b)z} + \frac{1}{ax+b} = \frac{\tan x}{a + (ax+b)\tan x}.$$

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. ÉTIENNE POMEY.

L'équation différentielle des coniques, rapportées à deux axes de coordonnées rectangulaires et ayant pour foyers F et F′ situés sur Ox de part et d'autre de l'origine à la distance c de ce point, est

$$(1)\qquad xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - c^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Pour intégrer cette équation, M. Jordan (*Cours d'Analyse,* t. III, p. 40) la ramène à une équation de Clairaut par la substitution $x^2 = u, y^2 = v$. Mais on peut aussi l'intégrer directement par la méthode suivante, qui repose sur quelques transformations simples qu'on peut lui faire subir, de façon à la ramener à la forme $du + dv = 0$, d'où résulte la solution $u + v =$ const.

L'équation (1) peut, en effet, s'écrire successivement

$$(2)\quad xy\,dy^2 + x^2\,dx\,dy - y^2\,dx\,dy - c^2\,dx\,dy - xy\,dx^2 = 0,$$

$$(3)\quad x\,dy(y\,dy + x\,dx) - y\,dx(y\,dy + x\,dx) = c^2\,dx\,dy,$$

$$(4)\quad (x\,dy - y\,dx)(y\,dy + x\,dx) = c^2\,dx\,dy.$$

On voit donc que, si l'on pose, pour abréger,

$$x\,dy - y\,dx = m, \qquad y\,dy + x\,dx = n,$$
$$c\,dx = p, \qquad c\,dy = q,$$

l'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{m}{q} = \frac{p}{n},$$

d'où l'on tire

$$(5)\quad \frac{m+q}{m-q} = \frac{p+n}{p-n} = \pm\frac{\sqrt{(m+q)^2 + (p+n)^2}}{\sqrt{(m-q)^2 + (p-n)^2}}.$$

Or on a

$$(m+q)^2 + (p+n)^2 = [(x+c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$
$$(m-q)^2 + (p-n)^2 = [(x-c)^2 + y^2](dx^2 + dy^2),$$
$$p + n = (x+c)\,dx + y\,dy,$$
$$p - n = (x-c)\,dx + y\,dy,$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{(x+c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \pm \frac{(x-c)\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} = 0.$$

Chacune des deux fractions figurant dans cette équation est la demi-différentielle de son dénominateur. On a donc, en intégrant et désignant par a une constante arbitraire,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

équation qui représente toutes les ellipses et hyperboles ayant pour foyers les points F et F′.

SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE CONVERGENCE;

PAR M. J.-L.-W.-V. JENSEN.

Des recherches que j'ai entreprises en vue d'une généralisation de la théorie de convergence d'une série à termes positifs ont en même temps donné une simplification imprévue de la présente théorie. Les critères de Cauchy, de Duhamel et Raabe, de Bertrand, etc., peuvent dès lors être exposés en quelques lignes comme simples corollaires d'un théorème général, comme nous le verrons immédiatement.

THÉORÈME. — *La série à termes positifs* Σu_n *sera convergente, si, à partir d'une certaine valeur du nombre entier et positif n,*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} > \mu, \tag{1}$$

a_n *étant une fonction positive de* n *et* μ *une constante positive.*

De l'inégalité (1) en découle une autre

$$u_{n+1} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}),$$

d'où il suit

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} < \frac{1}{\mu}(a_n u_n - a_{n+m} u_{n+m}) < \frac{1}{\mu} a_n u_n.$$

Le théorème est donc démontré.

En posant $a_n = 1$, on a le critère de convergence de Cauchy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 > \mu \qquad \text{ou} \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 + \mu,$$

et le reste de la série à partir du terme u_n sera plus petit que $\frac{1}{\mu} u_n$.

Si, au contraire,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1, \qquad \text{d'où} \qquad u_n < u_{n+1},$$

u_n est croissant avec n, et la série sera divergente.

En posant $a_n = n$, on a le critère de Duhamel

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 > \mu \qquad \text{ou} \qquad n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \mu,$$

et le reste sera plus petit que $\frac{1}{\mu} n u_n$.

Si, au contraire,

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1, \qquad \text{d'où} \qquad n u_n < (n+1) u_{n+1},$$

$n u_n$ est croissant avec n, et la série sera divergente.

Pour $a_n = n \log n$, $n \log n \log\log n$, ..., nous aurons les critères de M. Bertrand.

Étant donnée une série quelconque à termes positifs Σu_n, il n'y a aucune difficulté à démontrer que l'on peut toujours trouver un a_n satisfaisant à l'inégalité (1) et que l'on peut même choisir a_n d'une telle manière que $\sum \frac{1}{a_n}$ soit divergente. Le théorème en question est

donc général dans le domaine des séries à termes positifs, aussi bien que le suivant :

THÉORÈME. — *La série à termes positifs* Σu_n *sera* $\left\{\begin{matrix}\textit{convergente}\\ \textit{divergente}\end{matrix}\right\}$, *si, à partir d'une certaine valeur de* n,

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \left\{\begin{matrix} > \mu, \\ < 0, \end{matrix}\right.$$

a_n *et* μ *étant positifs et la série* $\sum \frac{1}{a_n}$ *divergente.*

Dans le second cas, qui seul reste à démontrer, on a pour $n \geqq n'$,

$$a_n u_n > a_{n'} u_{n'} \qquad \text{ou} \qquad u_n > \frac{1}{a_n} a_{n'} u_{n'}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En général, nous pouvons prendre $a_n = \frac{\lambda_n}{b_{n+1} - b_n}$, si λ_n reste fini, tandis que b_n grandit sans cesse et infiniment avec n.

PROBLÈME;

PAR M. A. AURIC,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Soient n aiguilles tournant autour du même axe, dans le même sens, avec des vitesses p fois plus grandes l'une que l'autre.

Nous voulons déterminer une position de ces n aiguilles, telle qu'il soit possible de les permuter circulairement.

Adoptons le système de numération de base p; la position des aiguilles est complètement déterminée par la fraction de circonférence décrite par l'aiguille qui tourne le plus lentement.

Considérons la fraction périodique

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers tous plus petits que la base p.

Je dis que, pour cette position des aiguilles, on pourra les permuter circulairement.

En effet, la $m^{\text{ième}}$ aiguille, par exemple, a décrit un arc exprimé en circonférences par

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1}, \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots;$$

autrement dit, cette aiguille a fait un nombre entier de tours, plus la fraction de circonférence

$$0, \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \ldots.$$

Cette expression montre que l'on pourra permuter circulairement toutes les aiguilles, car elle est indépendante de l'aiguille que l'on considère.

Nous aurons donc autant de positions qu'il y a de nombres d'au plus n chiffres dans le système de numération p, soit p^n.

En particulier, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, la fraction de circonférence décrite sera la même pour toutes les aiguilles; autrement dit, elles sont toutes confondues.

Considérons l'aiguille des heures et celle des minutes d'une montre ordinaire : ici $p = 12$, et toutes les positions données par la fraction

$$0, \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta \ldots$$

représentent des positions que l'on peut intervertir ; α et β sont plus petits que 12 et sont exprimés : α en heures et β en 5^{m}.

SUR LES SÉRIES ORDONNÉES SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES D'UNE VARIABLE;

PAR M. CH. BIEHLER.

On sait que, si une série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances d'une variable x, est convergente pour une valeur de x dont le module est R, elle est convergente pour toute valeur de x dont le module est moindre que R; elle représente, pour toutes ces valeurs de la variable, une fonction continue de x. Cette propriété subsiste en conséquence pour toute valeur de x représentée par un point du plan situé dans l'intérieur d'un cercle d'un certain rayon R′, désigné sous le nom de *cercle de convergence*. Si l'on prend les dérivées des termes de la série (1) supposée convergente dans le cercle de rayon R′, on obtient une nouvelle série

$$(2) \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_2 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots,$$

convergente pour toute valeur de la variable située dans l'intérieur de ce cercle. Remarquons, en outre, que, pour toutes ces valeurs, les séries formées par les modules des termes des séries (1) et (2), à savoir

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_n r^n + \ldots,$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2 + \ldots + n\alpha_n r^{n-1} + \ldots,$$

où α_μ désigne le module de a_μ, sont convergentes.

Nous allons donner, dans ce qui suit, une démonstration simple d'une propriété connue, mais importante, de

ces séries, à savoir : la série (2) représente une fonction qui est la dérivée de la fonction représentée par la première, pour toute valeur de la variable située dans l'intérieur du cercle de convergence.

Soit

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

et soit $F_n(x)$ le polynôme de degré n,

$$F_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

soit $R_n(x)$ la somme de tous les termes qui suivent le $(n+1)^{\text{ième}}$ dans la série (1).

On aura

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x);$$

en désignant par $x+h$ une valeur de la variable représentée également par un point situé dans l'intérieur du cercle de convergence, on aura aussi

$$F(x+h) = F_n(x+h) + R_n(x+h);$$

d'où

$$F(x+h) - F(x) \\ = F_n(x+h) - F_n(x) + R_n(x+h) - R_n(x)$$

et

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ = \frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h} + \frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h};$$

lorsque h tend vers zéro, $\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h}$ a pour limite la dérivée du polynôme $F_n(x)$, soit $F'_n(x)$,

$$F'_n(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1}.$$

Considérons la seconde partie, $\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h}$; on

peut écrire

$$R_n(x+h) - R_n(x)$$
$$= a_{n+1}[(x+h)^{n+1} - x^{n+1}] + a_{n+2}[(x+h)^{n+2} - x^{n+2}] + \ldots,$$

car $R_n(x+h)$ et $R_n(x)$ sont des séries convergentes.

Mais

$$(x+h)^{n+1} - x^{n+1} = h[(x+h)^n + (x+h)^{n-1}x + \ldots + x^n],$$

et de même pour les autres termes ; on pourra donc poser

$$R_n(x+h) - R_n(x) = h\,\Phi_n(x,h),$$

où $\Phi_n(x,h)$ est une fonction entière.

Nous allons chercher une limite du module de la fonction $\Phi_n(x,h)$. Soit ρ le plus grand des modules des quantités $x+h$ et x, on aura

$$\text{mod}[(x+h)^n + (x+h)^{n-1}x + \ldots + x^n] < (n+1)\rho^n;$$

par suite,

$$\text{mod}\,\Phi(x,h) < (n+1)\alpha_{n+1}\rho^n + (n+2)\alpha_{n+2}\rho^{n+1} + \ldots.$$

La série

$$\alpha_1 + 2\alpha_2\rho + 3\alpha_2\rho^2 + \ldots + n\alpha_n\rho^{n-1} + (n+1)\alpha_{n+1}\rho^{n+1} + \ldots$$

étant convergente, on peut trouver une valeur de n finie, telle que

$$(n+1)\alpha_{n+1}\rho^n + (n+2)\alpha_{n+2}\rho^{n+1} + \ldots$$

soit inférieur à un nombre donné ε ; par suite, en désignant par ε_n une quantité aussi petite que l'on voudra, on aura pour toute valeur de h satisfaisant à la condition que $x+h$ soit dans l'intérieur du cercle de convergence,

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} = \varepsilon_n.$$

D'autre part, on peut trouver une valeur de h assez

petite pour que

$$\frac{F_n(x+h) - F_n(x)}{h}$$

ne diffère de $F'_n(x)$ que d'une quantité η_n aussi petite qu'on voudra; $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ pourra donc s'écrire

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'_n(x) + \varepsilon_n + \eta_n.$$

Mais la série

$$F_1(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

est convergente; on peut donc prendre n assez grand pour que $F_1(x)$ ne diffère de $F'_n(x)$ que d'une quantité ζ_n aussi petite que l'on voudra,

$$F'_n(x) = F_1(x) + \zeta_n;$$

par suite,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F_1(x) + \varepsilon_n - \eta_n + \zeta_n.$$

Lorsque h tend vers zéro, le premier membre a pour limite la dérivée de la fonction $F(x)$. On voit que cette limite existe et est $F(x)$. Il ne saurait y avoir en effet de différence entre cette limite et $F_1(x)$; car, si l'on supposait qu'il en existe une finie, quelque petite qu'on la suppose, ce qui précède montre qu'on peut trouver un nombre n, tel que la différence entre $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ soit plus petite que la différence assignée; la fonction $F(x)$ a donc bien pour dérivée $F_1(x)$.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Halphen à M. Rouché. — Voici des résultats bien curieux, qui me paraissent pouvoir être mis dans vos *Nouvelles Annales,* sous la forme que vous voudrez, comme problèmes, par exemple.

Il s'agit des polynômes A_n qui se déduisent les uns des autres par la loi

$$A_n = x^2 A_{n-2} - (2n-1) A_{n-1},$$

et qui fournissent la solution de l'équation de Riccati

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[\frac{n(n+1)}{x^2} + 1\right] y$$

par la formule

$$y = \frac{A_n}{x^n} e^x.$$

Ce sont

$$A_1 = x - 1,$$
$$A_2 = x^2 - 3x + 3,$$
$$A_3 = x^3 - 6x^2 + 15x - 15,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient $a, b, \ldots$ les racines de A_n.

1° Le discriminant a la valeur suivante :

$$\Pi(a-b)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} 3^{2n-3}.5^{2n-5}.7^{2n-7}\ldots(2n-3)^3(2n-1).$$

2° La fonction symétrique $\Pi(a+b)$ s'exprime ainsi :

$$\Pi(a+b) = 3.5^2.7^3\ldots(2n-3)^{n-2}(2n-1)^{n-1}.$$

3° A_n a une seule racine réelle ou n'en a point, suivant la parité de n.

J'en passe et des meilleurs, etc.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Astronomie pratique : application à la Géographie et à la Navigation; par M. *E. Caspari,* ingénieur hydrographe de la marine. Ire Partie : *Coordonnées vraies et apparentes. Théorie des instruments.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888.

L'imprimerie de MM. Gauthier-Villars est vraiment dans une période heureuse; elle nous a donné, dans un laps de temps fort restreint, la *Thermodynamique* de M. Bertrand, la *Théorie des surfaces* de M. Darboux, le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, les *Fonctions elliptiques* de M. Halphen, ..., c'est-à-dire une série d'Ouvrages qui font époque et dont tout mathématicien voudra orner sa bibliothèque.

Ce n'est pas assurément le Livre de M. Caspari qui rompra la veine; quoique s'adressant à un public un peu plus particulier, ce nouvel Ouvrage nous semble appelé à un succès rapide et, disons-le bien vite et très haut, fort justement acquis.

L'un des mérites de M. Caspari est d'avoir su se borner : son sujet est nettement circonscrit; il s'agit, comme le sous-titre du livre l'indique, non d'un traité complet d'Astronomie pratique, mais de l'application de l'Astronomie à la Géographie et à la Navigation. Ce que l'auteur se propose, c'est de fournir aux voyageurs, aux marins comme aux explorateurs des continents, les moyens les plus commodes et les plus sûrs pour fixer leur position sur notre globe et pour y tracer leur route.

Certes il serait malaisé d'inventer beaucoup sur des questions abordées déjà par Ulysse et par les Phéniciens et si diversement résolues depuis Copernic et Tycho Brahé. Mais, si le sujet n'est pas neuf, il a peut-être plus qu'un autre besoin d'être rajeuni. Il y a, sans nul doute, une place à prendre à côté du charmant volume de M. Faye, que les gens du métier trouvent trop exclusivement théorique. Nous ne voulons pas dire, on le pense bien, qu'il faut se priver des ressources de la Géométrie et de l'Analyse; à notre sens, au contraire, le praticien digne de ce nom doit posséder parfaitement toutes les connais-

sances propres à faciliter sa besogne et il doit manier le calcul et les formules avec la même dextérité que le théodolite ou le sextant. Le véritable objectif est une étude approfondie des instruments et des méthodes, une critique sévère qui montre l'étendue et les limites de leur emploi, et qui apprenne à en tirer le meilleur parti dans les circonstances si diverses où l'observateur peut être placé.

L'examen attentif du livre de M. Caspari permet d'affirmer, à en juger par ce premier Volume, que l'auteur a rempli ce programme avec autant de conscience que de talent.

C'est la théorie des instruments qui nous a le plus séduit. Un Chapitre est consacré aux instruments pour la mesure des angles, lunette astronomique, cercles divisés, cercle méridien, théodolite, instruments à réflexion. Un autre est relatif aux chronomètres et contient le résumé des travaux de MM. Phillips, Lieussou, Daussy, Vincendon, Mouchez, Villarceau, etc. On trouve dans ces deux Chapitres, outre une exposition claire et précise, des remarques intéressantes, des détails ingénieux qui révèlent, chez l'auteur, la double expérience des voyages et de l'enseignement. Non seulement M. Caspari connaît à fond tous les secrets du métier, mais il les dévoile avec l'art et la mesure d'un professeur qui sait instruire sans fatiguer. Cette partie, qui forme les deux derniers tiers du Volume, sera certainement fort appréciée, aussi bien par les personnes compétentes que par les lecteurs qui n'auraient aucune connaissance antérieure du sujet.

La première Partie du Volume n'est en quelque sorte qu'une introduction à la Science des voyages. On y passe en revue : d'abord la Trigonométrie sphérique, les développements en série, les formules d'interpolation; puis, les divers systèmes de coordonnées célestes, leur transformation, la mesure du temps, la variation des plans fondamentaux, l'aberration, l'usage de la *Connaissance des Temps* et des Catalogues d'étoiles; enfin, les coordonnées géographiques, les formules relatives à l'ellipsoïde terrestre, à la parallaxe, à la réfraction et à la dépression de l'horizon. C'est un résumé fort simple et bien coordonné des notions d'Analyse et d'Astronomie indispensables pour la navigation.

Peut-être, dans les développements en série, eût-on pu, sans grande peine, sinon sans profit, indiquer l'expression du reste; et, dans la méthode des approximations successives, il eût été

important d'observer qu'après la substitution d'une valeur approchée, il faut supprimer les termes de l'ordre supérieur à celui que l'on considère.

Les formules relatives à l'ellipsoïde terrestre pourraient être obtenues plus simplement. Ainsi, la relation entre la colatitude géographique et la colatitude astronomique s'obtient immédiatement en exprimant la dépendance si connue entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués; et nul besoin n'est de transformer cette relation pour développer en série la différence des deux colatitudes, puisqu'on a appris antérieurement à développer la différence de deux arcs dont les tangentes ont un rapport assigné.

Enfin, nous aurions désiré voir dans ce premier Volume la théorie des erreurs, qui, d'après la Préface, ne figurera qu'à la fin du second. On eût trouvé, à propos des instruments, mainte occasion d'appliquer cette théorie, qui n'exige d'ailleurs qu'une bien petite place si l'on se borne, comme M. Caspari semble l'annoncer, à la marche à suivre pour établir les équations de condition et pour évaluer la précision d'une observation. Le principe de la méthode des moindres carrés résulte en effet immédiatement de la loi donnée par Gauss pour la facilité des erreurs; et cette loi elle-même, comme l'a récemment indiqué M. Bertrand, n'est qu'une conséquence fort simple de ce fait que la fonction doit être impaire et qu'on néglige les puissances supérieures de l'erreur; cette expression devient par cela même proportionnelle au binôme qui forme les deux premiers termes du développement de l'exponentielle de Gauss, laquelle représente donc, au même degré d'approximation, la fonction cherchée.

M. Caspari ne peut nous savoir mauvais gré de ces quelques observations. Si ce sont des ombres, elles sont bien légères et uniquement destinées à faire mieux ressortir le fini des détails et la belle ordonnance du tableau. E. R.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse. Tome I, renfermant les travaux exécutés de 1873 à la fin de 1878, sous la direction de M. *F. Tisserand*, ancien

Directeur de l'observatoire de Toulouse, Membre de l'Institut, etc.; publié par M. *Baillaud*, Directeur de l'observatoire, Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse. In-4°, avec planche. Paris, Gauthier-Villars, 1881. Prix : 30fr. — Tome II, renfermant les travaux exécutés de 1879 à 1884, sous la direction de M. *B. Baillaud*. In-4° ; 1886. Prix : 30fr.

HISTOIRE DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES, DEPUIS SA FONDATION JUSQU'A CE JOUR ; par M. *Ch. de Comberousse*. Un beau volume grand in-8°, orné de 4 planches à l'eau-forte, tirées sur chine. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 12fr.

ANNUAIRE POUR L'AN 1888, publié par le Bureau des Longitudes, contenant une Note sur la *Construction pratique des Cadrans solaires*, par M. *Cornu*, Membre de l'Institut, et les Notices suivantes : *L'âge des étoiles;* par M. *Janssen*, Membre de l'Institut. — *Notice sur le Congrès astrophotographique international réuni à l'observatoire de Paris en avril* 1887 *pour l'exécution de la Carte photographique du Ciel;* par M. l'Amiral *Mouchez*, Membre de l'Institut, Directeur de l'observatoire de Paris. — *Récit d'un voyage magnétique en Orient;* par M. *d'Abbadie*, Membre de l'Institut. In-18 de 820 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Fils. Prix : broché, 1fr,50; cartonné, 2fr.

TRAITÉ DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ; par M. *H. Resal*. Deuxième édition, augmentée et entièrement refondue. Deux beaux volumes in-4°. Paris, Gauthier-Villars; 1887 et 1888. Prix : 27fr.

On vend séparément : Tome I. *Capillarité, Élasticité, Lumière;* 15fr. Tome II. *Chaleur, Thermodynamique, Électrostatique, Courants électriques, Électrodynamique, Magnétisme statique, Mouvements des aimants et des courants;* 12fr.

ŒUVRES DE FOURIER, publiées par les soins de M. *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. Tome I : *Théorie analytique de la chaleur*. In-4°. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1888. Prix : 25fr.

LES CARTES TOPOGRAPHIQUES. — LA CARTE DITE DE L'ÉTAT-MAJOR. *Historique, Projection, Géodésie, Hypsométrie, Topographie, Critique et lecture;* par M. *J. Collet*, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, membre de la Société des touristes du Dauphiné. Grand in-8°, avec figures dans le texte et 4 planches. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Prix : 2fr,50.

CONFÉRENCES SUR QUELQUES-UNS DES PROGRÈS RÉCENTS DE LA PHYSIQUE ; par M. *P.-G. Tait*. Traduit de l'anglais, sur la 3e édition, par M. *Krouchkoll*, licencié ès Sciences physiques et mathématiques. Grand in-8°, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Prix : 7fr,50.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ROULETTES;

Par M. E. CESARO.

1. Nous nous proposons de montrer comment les principes fondamentaux de la Géométrie intrinsèque conduisent par une voie facile aux résultats, connus, de la théorie des roulettes. Certes, ces résultats peuvent être obtenus avec plus de simplicité et d'élégance par des considérations géométriques ou cinématiques, mais celles-ci n'ont pas le caractère d'uniformité analytique qui distingue les méthodes intrinsèques et les rend extrêmement propres aux recherches de Géométrie infinitésimale. Aussi nous garderons-nous parfois de proposer les nouveaux procédés au point de vue de l'exposition didactique, mais nous ne cesserons jamais de les recommander comme constituant une puissante méthode d'investigation.

2. Considérons d'abord, dans un plan, une ligne (M_1) roulant, sans glisser, sur la ligne (M_0). Soit M le point de contact des deux lignes, et prenons pour axes (mobiles) la tangente et la normale à ces lignes, en M. Soient x et y les coordonnées d'un point P, solidaire avec (M_1), entraîné par cette ligne dans le mouvement. Pour exprimer que P est fixe dans le plan de (M_1), on doit écrire

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds_1} = \frac{y - \rho_1}{\rho_1}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = -\frac{x}{\rho_1}.$$

D'autre part, les variations absolues de x et y, dans

le plan fixe, sont données par les équations

$$(2) \qquad \frac{\delta x}{ds_0} = \frac{dx}{ds_0} - \frac{y - \rho_0}{\rho_0}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = \frac{dy}{ds_0} + \frac{x}{\rho_0}.$$

Du reste, $ds_0 = ds_1$; conséquemment, si l'on pose

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0},$$

les formules (2) deviennent, en vertu de (1),

$$(3) \qquad \frac{\delta x}{ds_0} = \frac{y}{R}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = -\frac{x}{R}.$$

3. Les égalités (3), divisées membre à membre, nous disent que la normale à (P), en P, passe par M. Élevées au carré et additionnées, elles nous donnent le rapport de la vitesse de P à celle de M,

$$(4) \qquad \frac{ds}{ds_0} = \frac{u}{R},$$

u étant la distance MP. On a donc

$$(5) \qquad s = \int \frac{u\,ds_1}{R}.$$

4. Les cosinus directeurs de la tangente à (P), en P, sont

$$\lambda = \frac{y}{u}, \qquad \mu = -\frac{x}{u},$$

et l'on a, en vertu de (1),

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{x}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{\rho_1}\right), \qquad \frac{d\mu}{ds_1} = \frac{y}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Les formules générales

$$(6) \qquad \frac{\delta\lambda}{ds_0} = \frac{d\lambda}{ds_0} - \frac{\mu}{\rho_0}, \qquad \frac{\delta\mu}{ds_0} = \frac{d\mu}{ds_0} + \frac{\lambda}{\rho_0}$$

deviennent donc

$$\frac{\partial\lambda}{ds_0} = \frac{x}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{R}\right), \qquad \frac{\partial\mu}{ds_0} = \frac{y}{u}\left(\frac{y}{u^2} - \frac{1}{R}\right).$$

Élevant au carré et ajoutant, il vient, en tenant compte de (4),

$$(7) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{Ry}{u^3}.$$

Les formules (5) et (7) conduisent, par des éliminations convenables, à une relation entre ρ et s, qui est l'équation intrinsèque de la roulette (P).

5. Si, dans (7), on égale à zéro le second membre, on obtient l'équation

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - Ry = 0,$$

représentant le lieu des points P, qui marquent des inflexions sur les trajectoires correspondantes, à l'instant considéré. On parvient ainsi à la notion du *cercle des inflexions*. Le point H, diamétralement opposé à M, sur ce cercle, est le centre instantané géométrique du second ordre, point de concours des tangentes aux trajectoires, en leurs points d'inflexion.

6. Lorsque (M_0) est une droite, on a $\rho_0 = \infty$, $R = \rho_1$, et les formules (5), (7) deviennent

$$(9) \qquad s = \int \frac{u\,ds_1}{\rho_1}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{\rho_1 y}{u^3}.$$

Ces égalités ont une grande analogie avec les formules relatives aux podaires. On sait, en effet, que les coordonnées intrinsèques de la podaire de (M_1), par rapport

à P, sont données par les équations

$$s^{(0)} = \int \frac{u\,ds_1}{\rho_1}, \qquad \frac{1}{\rho^{(0)}} = \frac{2}{u} - \frac{\rho_1 y}{u^3}.$$

Par comparaison avec (9), on obtient

$$(10) \qquad s = s^{(0)}, \qquad \frac{1}{\rho^{(0)}} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u}.$$

La première de ces égalités nous dit que tout arc de roulette, à base rectiligne, est égal à l'arc correspondant de la podaire de la courbe génératrice, par rapport au point décrivant. Ce théorème est dû à Steiner. La seconde formule (10) nous dit que, dans le roulement de la podaire de (M_1), par rapport à P, sur (P), le diamètre du cercle des inflexions est égal à u. D'ailleurs, il est presque évident que, relativement à la podaire roulante, les coordonnées de P sont

$$u^{(0)} = y, \qquad y^{(0)} = \frac{y^2}{u}.$$

Par substitution dans le second membre de (7), on trouve un résultat nul. Conséquemment, si, dans le roulement d'une courbe (M_1) sur une droite, un point P, fixe dans le plan de (M_1), décrit la courbe (P), la podaire de (M_1) par rapport à P, en roulant sur (P), fera décrire à P une droite. Ce théorème est dû à M. Habich [1].

7. Plus généralement, si $\rho_0 = m\rho_1$, on a

$$s = \frac{m-1}{m} s^{(0)}, \qquad \frac{m-1}{\rho} = \frac{m}{\rho^{(0)}} - \frac{m+1}{u}.$$

---

[1] *Mathesis*, p. 145; 1882.

Il y a donc proportionnalité entre l'arc de la roulette et celui de sa podaire. En particulier, pour $m = -1$,

$$s = 2s^{(0)}, \qquad \rho = 2\rho^{(0)}.$$

Par suite, si une courbe roule sur une courbe égale et opposée, la trajectoire de tout point du plan de la première courbe est semblable à la podaire de cette courbe par rapport au point décrivant. Il faut, bien entendu, que les deux courbes soient symétriquement placées, à l'origine du mouvement, par rapport à la tangente commune. Elles resteront alors constamment symétriques, et la propriété énoncée devient évidente.

8. Lorsque le point P n'est plus fixe dans le plan de (M_1), il faut connaître avant tout la trajectoire qu'il décrit dans le plan mobile et la position qu'il y occupe à chaque instant. Il suffit de se donner, dans ce but, le rayon de courbure ρ' de la trajectoire et le rapport k de la vitesse de P à celle de M : ces deux quantités peuvent être considérées comme des fonctions connues de s_1. Nous nous bornerons à examiner le cas très simple où la trajectoire de P, dans le plan mobile, rencontre orthogonalement les rayons MP. Soient M', P' les nouvelles positions de M, P, après un mouvement infinitésimal, de sorte que

$$MM' = ds_1, \qquad PP' = k\,ds_1.$$

Les droites MP, M'P' concourent au centre de courbure de la trajectoire de P, dans le plan de (M_1) : les arcs PP' et la projection de MM' sur la perpendiculaire à MP, élevée par M, sont interceptés par les côtés du même angle au centre sur deux circonférences, dont les rayons sont ρ' et $u - \rho'$. On en déduit

$$(11) \qquad \frac{k}{y} = \frac{1}{u - \rho'} - \frac{1}{u}.$$

9. Cela posé, nous ne pouvons plus nous servir des formules (1) qui ont été obtenues en supposant $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, tandis que, dans le cas actuel, nous avons

$$\frac{\delta x}{ds_1} = -\frac{ky}{u}, \qquad \frac{\delta y}{ds_1} = \frac{kx}{u}.$$

Par suite, au lieu de (1),

$$(12) \qquad \frac{dx}{ds_1} = \frac{y - \rho_1}{\rho_1} - \frac{ky}{u}, \qquad \frac{dy}{ds_1} = -\frac{x}{\rho_1} + \frac{kx}{u};$$

puis, au lieu de (3),

$$\frac{\delta x}{ds_0} = \frac{y}{R} - \frac{ky}{u}, \qquad \frac{\delta y}{ds_0} = -\frac{x}{R} + \frac{kx}{u}.$$

A la formule (4) on doit donc substituer

$$(13) \qquad \frac{ds}{ds_0} = \frac{u}{R} - k.$$

Enfin les expressions de λ et μ restent les mêmes; mais on a, en vertu de (12),

$$\frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{x}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{\rho_1} + k\right), \qquad \frac{d\mu}{ds_1} = \frac{y}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{\rho_1} + k\right);$$

puis, les formules (6) deviennent

$$\frac{\delta\lambda}{ds_0} = \frac{x}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{R} + k\right), \qquad \frac{\delta\mu}{ds_0} = \frac{y}{u^2}\left(\frac{y}{u} - \frac{u}{R} + k\right),$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (13),

$$(14) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{Ry}{u^2(u - kR)}.$$

C'est la généralisation de la formule (7), qui répond à l'hypothèse $k = 0$.

10. Si l'on tient compte de (11), on peut mettre la relation (14) sous la forme suivante :

$$(15) \qquad \frac{1}{u-\rho'} - \frac{1}{u-\rho} = \frac{u}{\mathrm{R}y}.$$

C'est la *formule de Savary*. Soient C et C' les centres de courbure des trajectoires de P dans le plan fixe et dans le plan mobile. La formule (15) nous dit que les perpendiculaires à la tangente et à MP, menées par C et M respectivement, concourent sur HC', ce qui permet de déterminer C, connaissant C'. Si l'on ne veut pas se servir du point H, on doit remarquer que les droites CC_0 et $C'C_1$ concourent sur la perpendiculaire à MP, élevée par M [1].

11. Il est clair qu'une ligne quelconque, fixe dans le plan de (M_1), et représentée par l'équation

$$(16) \qquad f(x, y) = 0,$$

touche son enveloppe aux points qu'elle a en commun avec la ligne

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{ds_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{ds_0} = 0.$$

En vertu de (3), la dernière égalité devient

$$(17) \qquad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Conséquemment, la ligne considérée touche son enveloppe aux pieds des perpendiculaires qu'on lui abaisse de M. Cette enveloppe est donc une trajectoire orthogonale des rayons MP, et, par suite, les résultats des trois derniers paragraphes lui sont applicables. Conséquem-

---

[1] *Voir*, dans les *Nouvelles Annales*, les théorèmes de Cinématique de MM. Habich et Dewulf (1882, p. 458; 1883, p. 297).

ment, une fois qu'on aura déterminé, au moyen des équations (16) et (17), les coordonnées x, y des points de contact, on obtiendra les coordonnées intrinsèques de l'enveloppe en appliquant à ces points les formules (13) et (15).

12. Soit une droite D, fixe dans le plan mobile. Elle touche son enveloppe au point P, projection de M. A cause de (11) et de $\rho' = \infty$, les formules (13) et (15) donnent

$$(18) \qquad s = \int \left(\frac{u}{R} + \frac{y}{u} \right) ds_1, \qquad \rho = u + \frac{Ry}{u}.$$

Nous voyons, par la seconde formule, que le symétrique du cercle des inflexions, par rapport à la tangente, est le lieu des points de rebroussement que les enveloppes des droites du plan mobile présentent à un instant donné : c'est le *cercle des rebroussements*. Lorsque D vient à toucher son enveloppe en un point de rebroussement, elle contient le symétrique de H par rapport à M.

13. La première formule (18) donne lieu à une remarque intéressante. Après un roulement quelconque, projetons sur D l'arc de courbe roulante, qui a subi le contact de la ligne fixe. Soit l la longueur de cette projection. Lorsque la ligne fixe est droite, l'arc enveloppé par D est, d'après (18),

$$\sigma = l + \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}.$$

Si la courbe (M_0) est telle que l'on ait, en chaque point, $\rho_0 = m\rho_1$, on a aussi, en vertu de (18),

$$s = l + \frac{m-1}{m} \int \frac{u\, ds_1}{\rho_1}.$$

Donc

$$ms - (m - 1)\sigma = l.$$

Ce théorème est susceptible d'utiles applications; nous ne nous y arrêterons pas.

14. Étudions le roulement d'une conique sur une droite. Si l'on pose, pour abréger,

$$p = \sqrt{\left(\frac{a\rho_1}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}, \qquad q = \sqrt{1 - \left(\frac{b\rho_1}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

de sorte que $a^2 q^2 + b^2 p^2 = c^2$, on a (¹)

$$\rho_1 = \frac{a^2 b^2}{c^3}(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{d\rho_1}{ds_1} = 3pq,$$

et les formules (9) deviennent

$$(19) \quad s = \int \frac{u(p\,dp + q\,dq)}{pq(p^2 + q^2)}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{u} - \frac{a^2 b^2 y}{c^3 u^3}(p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans chaque cas particulier, on exprimera p et q en fonction de u et les relations (19) donneront ensuite, par élimination de u, l'équation intrinsèque de la roulette cherchée.

15. On sait que les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{pqa}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et l'on en déduit

$$qa = \sqrt{u^2 - b^2}, \qquad pb = \sqrt{a^2 - u^2}.$$

(¹) Voir notre précédent Article *Sur deux classes de lignes planes.*

Les équations (19) deviennent

$$s = ab\int\frac{u^2\,du}{(a^2+b^2-u^2)\sqrt{(a^2-u^2)(u^2-b^2)}},$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{u} - \frac{a^2+b^2}{u^3}.$$

En particulier, pour l'hyperbole équilatère,

$$s = a^2\int\frac{du}{\sqrt{u^4-a^4}},\qquad \rho = \frac{u}{2}.$$

La dernière égalité nous dit que la roulette cherchée n'est autre que la ligne de Ribaucour, d'indice 3. Du reste, l'élimination de u conduit à l'équation intrinsèque

$$s = 2\int\frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2a}\right)^4-1}},$$

analogue à celle de la lemniscate de Bernoulli.

16. Les abscisses des foyers sont

$$\frac{pa(1+q)}{\sqrt{1+p^2}},\qquad -\frac{pa(1-q)}{\sqrt{1+p^2}},$$

et les ordonnées

$$\frac{a(1+q)}{\sqrt{1+p^2}},\qquad \frac{a(1-q)}{\sqrt{1+p^2}}.$$

On a donc $u = a(1\pm q)$, et, par suite,

$$\pm qa = u - a,\qquad \pm pb = \sqrt{a^2e^2-(u-a)^2},$$

où e représente l'excentricité. Les formules (19) deviennent

$$(20)\quad s = ab\int\frac{du}{(2a-u)\sqrt{a^2e^2-(u-a)^2}},\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} - \frac{1}{u}.$$

De la dernière égalité on déduit, presque immédiatement, que ces courbes sont les méridiennes des surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Ce théorème est dû à Delaunay ([1]). L'élimination de u entre les égalités (20) nous donne

$$s = ab \int \frac{d\rho}{(\rho - 2a)\sqrt{e^2(\rho - a)^2 - a^2}};$$

d'où, en effectuant l'intégration,

$$(21) \qquad \frac{e}{a}\rho = e - \cos\frac{s}{a} + \frac{\sin^2\frac{s}{a}}{e - \cos\frac{s}{a}}.$$

Telle est l'équation intrinsèque des courbes de Delaunay. Si la conique est une parabole, de paramètre 2α, on pose $a(1 - e) = \alpha$, et l'on fait tendre e vers l'unité, dans (21). Il vient

$$\rho = \alpha + \frac{s^2}{\alpha},$$

équation d'une chaînette. C'est pourquoi M. Lindelöf appelle ([2]) *chaînettes* toutes les courbes de Delaunay, en distinguant les *chaînettes elliptiques* des *chaînettes hyperboliques,* suivant la nature de la conique génératrice. En tournant autour de leur base, ces roulettes engendrent les remarquables surfaces appelées *onduloïde, caténoïde, nodoïde* par M. Plateau.

17. Les parallèles aux courbes de Delaunay sont re-

([1]) *Journal de Liouville,* p. 309; 1841.

([2]) *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante* (*Mémoires de la Société des Sciences de Finlande,* 1863).

présentées par l'équation

$$s = ab \int \frac{\rho\, d\rho}{(\rho + h)(\rho + h - 2a)\sqrt{e^2(\rho + h - a)^2 - a^2}}.$$

Or, si l'on fait $h = 2a$, on retrouve l'équation (21). Chaque courbe de Delaunay jouit donc de la propriété d'*être parallèle à une courbe égale*. Le cercle, qui est évidemment doué de cette propriété, est, après tout, une courbe de Delaunay. Pour $h = a$, on trouve que les courbes de Delaunay sont parallèles aux courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(22) \qquad \rho = a \sqrt{\frac{a^2 + b^2 \operatorname{tang}^2 \frac{s}{a}}{a^2 - b^2}}.$$

Chacune de ces lignes est à égale distance de deux courbes de Delaunay, engendrées par deux foyers, de noms contraires, de deux coniques égales, roulant sur une droite, et se maintenant symétriques par rapport à cette droite. Celle-ci rencontre la courbe médiane sur les normales communes d'inflexion. La démonstration géométrique de ces propriétés est extrêmement simple.

18. On sait qu'une ligne cycloïdale est représen par une équation de la forme

$$a^2 \rho_1^2 + b^2 s_1^2 = a^2 b^2,$$

et que les coordonnées du centre du cercle directeur sont

$$x = \frac{b^2 s_1}{a^2 - b^2}, \qquad y = \frac{a^2 \rho_1}{a^2 - b^2},$$

de sorte que

$$a^2 \rho_1^2 = (a^2 - b^2) u^2 - \frac{a^2 b^4}{a^2 - b^2},$$

$$b^2 s_1^2 = \frac{a^4 b^2}{a^2 - b^2} - (a^2 - b^2) u^2.$$

Les formules (9) donnent

$$s = \frac{a}{b}\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left[u^2 - \left(\frac{ab^2}{a^2-b^2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{a^2 b}{a^2-b^2}\right)^2 - u^2\right]}},$$

$$\rho = \left(\frac{a^2-b^2}{ab^2}\right)^2 u^3;$$

puis, par élimination de u,

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left[\left(\frac{a^2-b^2}{ab^2}\rho\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right]\left[1 - \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a^2-b^2}{ab^2}\rho\right)^{\frac{2}{3}}\right]}}.$$

C'est l'équation d'une conique ayant les axes proportionnels à a et b, et le paramètre égal au rayon du cercle directeur.

19. Si l'on veut déterminer (M_0) de manière que (P) soit une droite, il faut satisfaire à (8) avec les coordonnées de P. Les coordonnées intrinsèques de (M_0) seront donc

(23) $$s_0 = s_1, \qquad \rho_0 = \frac{u^2\rho_1}{u^2 - \rho_1 y}.$$

Supposons, par exemple, que (M_1) soit un cercle de rayon a, et que le point P, fixe dans le plan du cercle, soit à la distance ae du centre. Il est évident que

$$x = -ae\sin\frac{s_1}{a}, \qquad y = a\left(1 - e\cos\frac{s_1}{a}\right).$$

Par substitution dans (23) et élimination de s_1, on est reconduit à l'équation (21). On parvient ainsi au théorème suivant, dû à M. Habich : *La courbe sur laquelle il faut faire rouler un cercle, pour qu'un point de son plan décrive une droite, est une courbe de Delau-*

nay [1]. Celle-ci s'obtient en faisant rouler sur une droite une conique concentrique au cercle, et admettant pour foyer le point donné. Cette proposition a été déduite, par M. Habich, du théorème démontré au n° 6 : il suffit d'observer, à cet effet, que la podaire d'une conique, par rapport à un foyer, est la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre. Il est presque superflu d'ajouter que la circonférence est enveloppée dans son mouvement par deux courbes de Delaunay, égales, et que la trajectoire de son centre est représentée par l'équation (22).

20. Rappelons-nous que l'équation

$$s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^m - 1}}$$

représente une *spirale sinusoïde*, d'indice n, ou une *ligne de Ribaucour*, d'indice n, suivant que l'on attribue à m l'une ou l'autre des valeurs

$$\frac{2n}{n-1}, \qquad 2\frac{n+1}{n-1}.$$

Cela étant, faisons rouler une spirale sinusoïde sur une droite. A cause de la propriété fondamentale des spirales sinusoïdes, les coordonnées du pôle satisfont à l'égalité

$$(24) \qquad u^2 = (n+1)\rho_1 y,$$

et, par suite, la seconde équation (9) devient

$$\rho = \frac{n+1}{n} u.$$

---

[1] *Mathesis*, p. 103; 1886.

Le rayon de courbure de la trajectoire du pôle est donc proportionnel au segment de normale compris entre la roulette et sa base. Cette propriété caractérise les lignes de Ribaucour, dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{2}{\nu+1} = \frac{n+1}{n}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+1}.$$

Conséquemment, *si une spirale sinusoïde, d'indice n, roule sur une droite, son pôle décrit une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n-1}{n+1}$ [1]. Ce théorème parait dû à M. O. Bonnet. Pour en faire quelques applications, rappelons quelles sont les principales lignes appartenant aux deux classes dont il s'agit ici :

n.	Spirales sinusoïdes.	Lignes de Ribaucour.
∞	point	point
-1	droite	droite
1	cercle	cercle
0	spirale logarithmique	cycloïde
-2	hyperbole équilatère	parabole
2	lemniscate	....
$-\frac{1}{2}$	parabole	....
$\frac{1}{2}$	cardioïde	....
-3	....	chaînette
$-\frac{1}{3}$	....	(parallèle à une hypocycloïde)
$\frac{1}{3}$	(parallèle à une épicycloïde)	....

Cela posé, si l'on fait successivement $n = 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, on retrouve les théorèmes connus : 1° si une circonférence roule sur une droite, chacun de ses points décrit une cycloïde ; 2° si une spirale logarithmique roule sur une droite, son pôle parcourt une droite; 3° si une parabole roule sur une droite, son foyer décrit une chaî-

[1] *Étude sur les élassoïdes*, par M. Ribaucour (p. 158).

nette; 4° si une cardioïde roule sur une droite, son point de rebroussement se meut parallèlement à une hypocycloïde.

21. Cherchons la courbe sur laquelle il faut faire rouler une spirale sinusoïde pour que son pôle décrive une droite. Il faut satisfaire à (8), et, en même temps, l'équation (24) doit être vérifiée. La comparaison donne

$$R = (n+1)\rho_1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n}{n+1}\rho_0.$$

Donc, si

$$s_1 = \frac{n+1}{n-1}\int\frac{d\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}$$

est l'équation de la ligne donnée, celle de la ligne inconnue sera

$$s_0 = \frac{n}{n-1}\int\frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{\alpha}\right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1}}.$$

Or cette équation représente une ligne de Ribaucour, dont l'indice ν est lié par l'égalité

$$\frac{\nu+1}{\nu-1} = \frac{n}{n-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = 2n-1.$$

Conséquemment, *la ligne sur laquelle il faut faire rouler une spirale sinusoïde, d'indice n, pour que son pôle décrive une droite, est une ligne de Ribaucour, d'indice $2n-1$*. Ajoutons que les deux courbes doivent opposer leurs convexités lorsque n est compris entre 0 et -1. On démontrerait, tout aussi facilement, que, *si l'on renverse la courbe fixe, le pôle décrit une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{2n-1}{2n+1}$.

22. La première proposition est une conséquence évidente du théorème de M. Habich, démontré au n° 6. Il suffit de remarquer qu'une spirale d'indice n admet pour podaire, par rapport au pôle, une spirale d'indice $\frac{n}{n+1}\cdot$ D'après cela, le théorème du n° 7 nous dit immédiatement que, *si une spirale d'indice n roule sur une spirale égale, opposée, son pôle décrit une spirale d'indice* $\frac{n}{n+1}\cdot$ Cette remarque a été déjà faite par M. Bassani (¹). On démontre aussi que, *si une ligne de Ribaucour, d'indice n, roule sur une ligne égale, sa directrice enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n}{n+2}\cdot$

23. Si une ligne de Ribaucour roule sur une droite, sa directrice, qui intercepte sur la normale un segment $\frac{n+1}{2}\rho_1$, touche son enveloppe au pied de la perpendiculaire qu'on lui abaisse de M. Les coordonnées de cette projection satisfont donc à la relation

$$u^2 = \frac{n+1}{2}\rho_1 y, \tag{25}$$

qui, substituée dans la seconde équation (18), donne

$$\rho = \frac{n+3}{n+1}u.$$

Conséquemment, l'enveloppe est une autre ligne de Ribaucour, dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{2}{\nu+1} = \frac{n+3}{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+3}.$$

(¹) *Journal de Battaglini*; 1886.

Ainsi, *lorsqu'une ligne de Ribaucour, d'indice n, roule sur une droite, sa directrice enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n-1}{n+3}$ ([1]). Par exemple, pour $n = 1, 0, -2, -3$, on trouve que : 1° lorsqu'une circonférence roule sur une droite, chacun de ses diamètres enveloppe une cycloïde; 2° lorsqu'une cycloïde roule sur une droite, l'enveloppe de sa base est parallèle à une hypocycloïde; 3° lorsqu'une parabole roule sur une droite, sa directrice enveloppe une chaînette; 4° lorsqu'une chaînette roule sur une droite, sa directrice passe par un point fixe.

24. Pour généraliser la dernière propriété, cherchons la courbe sur laquelle il faut faire rouler une ligne de Ribaucour, pour que sa directrice contienne un point fixe. Les coordonnées de la projection de M sur la directrice doivent satisfaire à (25), et, en même temps, à l'équation du cercle des rebroussements. Il résulte de la comparaison

$$R = -\frac{n+1}{2}\rho_1, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \frac{n+3}{n+1}\rho_0.$$

Donc, si

$$s_1 = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho_1}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}},$$

est l'équation de la ligne donnée, celle de la ligne inconnue sera

$$s_0 = \frac{n+3}{n-1}\int \frac{d\rho_0}{\sqrt{\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^{2\frac{n+1}{n-1}} - 1}}.$$

([1]) *Sur une famille de courbes cycloïdales*, par M. E. Dubois (*Nouv. Corr. math.*, p. 159; 1880).

Or cette équation représente une spirale sinusoïde dont l'indice ν est lié à n par l'égalité

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{n - 1}{n + 1}, \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \frac{n + 1}{2}.$$

Ainsi, *la courbe sur laquelle il faut faire rouler une ligne de Ribaucour, d'indice n, pour que sa directrice pivote autour d'un point fixe, est une spirale sinusoïde, d'indice* $\frac{n+1}{2}$. Pour les valeurs de n, comprises entre -1 et -3, les deux courbes doivent opposer leurs convexités. On démontre en outre que, *si l'on renverse la courbe fixe, la directrice de la courbe mobile enveloppe une ligne de Ribaucour, d'indice* $\frac{n+1}{n+3}$.

25. On pouvait s'attendre à l'avant-dernier théorème; car, si les courbes génératrices échangent leurs rôles, les cercles des inflexions et des rebroussements en font autant. Dès lors, le centre H, qui, dans le roulement de (M_1) sur (M_0), est le point de concours des tangentes aux points d'inflexion, est également, dans le roulement de (M_0) sur (M_1), le point de concours des tangentes aux points de rebroussement. Or, si le point P décrit une droite D, lorsque (M_1) roule sur (M_0), il est nécessaire que D passe par H, et, par suite, dans le roulement de (M_0) sur (M_1), la droite D, passant par H, devra pivoter autour du point P. Par exemple, si une courbe de Delaunay roule sur un cercle convenablement choisi, sa base enveloppe un point.

26. De même, les théorèmes des nos 21 et 24 nous disent que : 1° lorsqu'une droite roule sur une chaînette, un point de son plan décrit une droite ; dans le roule-

ment inverse, la directrice de la chaînette passe par un point fixe; 2° si une cardioïde roule sur une cycloïde, convenablement choisie, son point de rebroussement parcourt la base de la cycloïde; dans le roulement inverse, la base de la cycloïde enveloppe un point; 3° la courbe sur laquelle il faut faire rouler la seconde podaire d'un cercle, par rapport à l'un de ses points, pour que ce point décrive une droite, est parallèle à une hypocycloïde; inversement, etc.; 4° si deux paraboles égales, qui se touchent aux sommets en opposant leurs convexités, roulent l'une sur l'autre, le foyer de chaque parabole restera constamment sur la directrice de l'autre. Ce dernier théorème se déduit aussi de la remarque faite au n° 7, et l'on peut même affirmer plus généralement que, dans le roulement d'une conique sur une conique égale, les foyers de la conique roulante décrivent des circonférences.

Plus généralement encore, F′ et F″ étant les foyers d'une conique roulant sur (M_0), soit F le symétrique de F″ par rapport à la tangente commune $x'x$. Il est clair que F est le foyer d'une conique égale à la première, roulant avec celle-ci sur (M_0). En d'autres termes, les deux coniques roulent l'une sur l'autre, de manière que le point de contact se déplace sur (M_0). L'angle $F''Mx$ est égal à chacun des angles FMx, $F'Mx'$, qui sont donc égaux entre eux. Donc M est sur FF′. De plus,

$$FM + MF' = MF' + MF'' = 2a.$$

En conséquence, les trajectoires (F) et (F′) sont parallèles et leur distance est égale au grand axe des coniques. En particulier, si l'on fixe une des coniques, (F′) se réduit à un point, et (F) est une circonférence de rayon $2a$.

27. La démonstration géométrique des théorèmes précédents ne présente aucune difficulté. Soient C_1 et C les centres de courbure de la spirale, roulant sur une droite, et de la trajectoire du pôle P. En vertu de la construction de Savary, la droite PC_1 passe par le point de rencontre Q des perpendiculaires à la base et à MP, menées respectivement par C et M. Soit N la projection de C_1 sur MP. On a, par la définition des spirales sinusoïdes, d'indice n,

$$n = \frac{PN}{NM} = \frac{PC_1}{C_1Q} = \frac{PM}{MC},$$

d'où

$$\frac{PM}{PC} = \frac{n}{n+1} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \text{si} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+1},$$

ce qui suffit pour définir une ligne de Ribaucour, d'indice ν. De même, si une ligne de Ribaucour roule sur une droite, le centre de courbure de l'enveloppe de la directrice s'obtient en projetant le point C_2, symétrique de C_1, par rapport à M, sur la perpendiculaire à la directrice, passant par M. Soient P la projection de M sur la directrice, et Q le point où celle-ci rencontre la normale. On a, par définition,

$$\frac{n+1}{2} = \frac{QM}{MC_2} = \frac{PM}{MC}.$$

d'où

$$\frac{PM}{PC} = \frac{n+1}{n+3} = \frac{\nu+1}{2}, \qquad \text{si} \qquad \nu = \frac{n-1}{n+3}.$$

On démontrerait de même les autres théorèmes.

Il faudra observer que, si (M_1) entraîne un point décrivant une droite D, ou une droite D′ pivotant autour d'un point, D et D′ contiennent respectivement H et le symétrique de ce point par rapport à M.

28. Tous ces théorèmes nous indiquent des modes de génération pour quelques courbes, dont nous ne connaissons, jusqu'à présent, que l'équation intrinsèque. Ainsi, dans un précédent article, nous avons rencontré les lignes de Ribaucour, aux indices 3 et — 5, respectivement représentées par les équations

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{4} - 1}}, \qquad s = \frac{2}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}},$$

qui ont une si grande analogie avec les équations de la lemniscate et de l'hyperbole équilatère

$$s = 3 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{4} - 1}}, \qquad s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}}.$$

Maintenant nous pouvons dire, grâce aux théorèmes qui précèdent, que la première courbe est le lieu du centre d'une hyperbole équilatère roulant sur une droite. Elle est aussi la courbe sur laquelle doit rouler une lemniscate, pour que son point double reste sur une droite. C'est encore l'enveloppe de la directrice d'une chaînette, roulant à l'extérieur d'une chaînette égale. De même, la seconde équation représente la courbe sur laquelle on doit faire rouler une hyperbole équilatère, pour que son centre décrive une droite. Inversement, lorsque les deux courbes considérées roulent respectivement sur une lemniscate et une hyperbole équilatère, convenablement choisies, leurs directrices pivotent autour de deux points fixes.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1888.

Soient C *la courbe lieu géométrique des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une ellipse donnée* E *et* D *une droite également donnée :*

1° *Démontrer qu'il y a trois coniques tangentes à la droite* D *et touchant en* quatre *points la courbe* C. *Déterminer la nature de ces trois coniques.*

2° *Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *les points où la droite* D *rencontre la courbe* C; *par deux de ces points* α_1, α_2, *par exemple, on fait passer une série de cercles coupant la courbe* C *en deux nouveaux points variables* m, m' *et l'on demande de trouver la courbe enveloppe des droites* mm'.

3° *On suppose la droite* D *tangente à l'ellipse* E *et, par les points* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, *où cette tangente rencontre la courbe* C, *on mène à l'ellipse des tangentes autres que la tangente* D; *trouver le lieu décrit par les sommets du quadrilatère formé par ces quatre tangentes, quand la droite* D *roule sur l'ellipse* E.

On trouve sans difficulté, pour l'équation de la courbe C,

$$(C) \qquad (x^2+y^2-a^2-b^2)^2 = k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

où $k^2 = \dfrac{4a^2b^2}{\tan^2\omega}$, a et b étant les axes de l'ellipse E, et ω l'angle donné.

On sait qu'une courbe ayant pour équation

$$B^2 = A,$$

où A et B sont des polynômes entiers en x et y, peut

être considérée comme l'enveloppe des courbes ayant pour équation

$$\lambda^2 - 2B\lambda + A = 0,$$

où λ est un paramètre variable. La courbe C peut donc être considérée comme l'enveloppe des coniques

$$(\text{V}) \quad \lambda^2 - 2\lambda(x^2+y^2-a^2-b^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) = 0,$$

ce qui conduit, en introduisant un paramètre arbitraire, à écrire ainsi son équation :

$$(c) \quad \begin{cases} (x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda)^2 \\ \quad = \lambda^2 - 2\lambda(x^2+y^2-a^2-b^2) + k^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right). \end{cases}$$

Sous cette forme, on voit que les coniques (V) sont tangentes à la courbe C en leurs *quatre* points de rencontre avec le cercle variable

$$x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda = 0$$

concentrique à l'ellipse E.

1° Soit

$$ux + vy = 1$$

l'équation de la droite D. Formons l'équation du faisceau des droites qui vont de l'origine aux points de rencontre de la droite D avec l'une des coniques (V) :

$$(1) \quad \begin{cases} [\lambda^2 + 2\lambda(a^2+b^2) - k^2](ux+vy)^2 \\ \quad - 2\lambda(x^2+y^2) + k^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right) = 0, \end{cases}$$

et écrivons que ce faisceau est composé d'un rayon double :

$$(2) \quad \begin{cases} [\lambda^2 + 2\lambda(a^2+b^2) - k^2] \\ \quad \times \left[u^2\left(\dfrac{k^2}{b^2}-2\lambda\right) + v^2\left(\dfrac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\right] + \left(\dfrac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\left(\dfrac{k^2}{b^2}-2\lambda\right) = 0. \end{cases}$$

L'équation précédente détermine les valeurs de λ pour lesquelles la conique (V) correspondante est tangente à la droite D; or cette équation est du troisième degré :

elle fait donc connaître trois coniques tangentes à cette droite et touchant en *quatre* points la courbe C.

La nature d'une conique (V) dépendant du signe de l'expression

$$\left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right),$$

on est conduit à substituer à λ, dans l'équation (2), les valeurs

$$-\infty, \qquad 0, \qquad \frac{k^2}{2a^2}, \quad \frac{k^2}{2b^2}, \quad +\infty,$$

qui fournissent les résultats suivants :

$$+, \quad 1-a^2u^2-b^2v^2, \quad +, \quad -, \quad -.$$

Si la droite D coupe l'ellipse E en deux points réels, l'expression $1-a^2u^2-b^2v^2$ est négative ; l'équation (2) a trois racines réelles et distinctes et les trois coniques sont deux ellipses et une hyperbole. Les deux ellipses seront réelles si les valeurs de λ correspondantes rendent négative l'expression

$$\lambda^2+2\lambda(a^2+b^2)-k^2,$$

et c'est ce qui résulte de ce qu'elles sont racines de l'équation (2) et rendent positives les deux expressions

$$u^2\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right)+v^2\left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{k^2}{a^2}-2\lambda\right)\left(\frac{k^2}{b^2}-2\lambda\right).$$

Si la droite D est tangente à l'ellipse E, l'expression $1-a^2u^2-b^2v^2$ est nulle ; l'équation (2) a une racine nulle et ses deux autres racines sont celles de l'équation

$$\lambda^2+\frac{4a^2v^2+4b^2u^2-\dfrac{k^2}{a^2b^2}}{2(u^2+v^2)}\lambda-k^2=0.$$

Cette équation ayant une racine négative, on en conclut que c'est la racine positive de l'équation (2), inférieure à $\frac{k^2}{2a^2}$, qui est devenue nulle.

La droite D devenant extérieure à l'ellipse E, l'expres-

sion $1 - a^2u^2 - b^2v^2$ devient positive et la racine nulle de l'équation (2) devient négative. Les trois coniques sont toujours deux ellipses réelles et une hyperbole.

Enfin, si les deux racines négatives se rejoignent, puis deviennent imaginaires, les ellipses correspondantes se confondent, puis deviennent imaginaires. La troisième conique est toujours une hyperbole.

2° Le premier membre de l'équation (1), lorsqu'on y remplace λ par une racine λ' de l'équation (2), devient le carré parfait d'une certaine fonction linéaire $u'x + v'y$, de sorte qu'on a identiquement

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &[\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2+b^2) - k^2](ux+vy)^2 \\ &\qquad - 2\lambda'(x^2+y^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (u'x + v'y)^2. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons, dans l'équation (c), le paramètre arbitraire λ par λ', puis, dans le second membre, substituons à $-2\lambda'(x^2+y^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ sa valeur tirée de cette identité, l'équation de la courbe C deviendra

$$(C)'\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda')^2 \\ &\quad = (u'x+v'y)^2 - [\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2+b^2) - k^2][(ux+vy)^2 - 1]. \end{aligned}\right.$$

Les points de rencontre de la droite D et de la courbe C sont donc les points de rencontre de la droite D et de la courbe

$$(x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda')^2 = (u'x+v'y)^2,$$

qui se compose de deux cercles

$$(4)\qquad x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' - (u'x+v'y) = 0,$$

$$(5)\qquad x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' + (u'x+v'y) = 0.$$

Un cercle quelconque passant par les points de rencontre α_1 et α_2 de la droite D et du premier cercle a pour équation

$$x^2+y^2-a^2-b^2-\lambda' - (u'x+v'y) - \mu(ux+vy-1) = 0,$$

μ désignant un paramètre arbitraire.

Les points de rencontre de ce cercle et de la courbe (C)'

sont les points de rencontre de ce cercle et de la courbe

$$[(u'x + v'y) + \mu(ux + vy - 1)]^2$$
$$= (u'x + v'y)^2 - [\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2 + b^2) - k^2][(ux + vy)^2 - 1],$$

ou, en développant,

$$\mu^2(ux + vy - 1)^2 + 2\mu(ux + vy - 1)(u'x + v'y)$$
$$+ [\lambda'^2 + \lambda'(a^2 + b^2) - k^2][(ux + vy)^2 - 1] = 0,$$

qui se compose des deux droites

$$ux + vy - 1 = 0,$$

$$\mu^2(ux + vy - 1) + 2\mu(u'x + v'y)$$
$$+ [\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2 + b^2) - k^2](ux + vy + 1) = 0.$$

La première est la droite D; la seconde est donc la droite mm', dont on a immédiatement l'enveloppe

$$(u'x + v'y)^2 - [\lambda'^2 + 2\lambda'(a^2 + b^2) - k^2][(ux + vy)^2 - 1] = 0,$$

ou, eu égard à l'identité (3),

$$(\mathrm{V})' \quad \lambda'^2 + 2\lambda'(x^2 + y^2 + a^2 - b^2) + k^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Cette enveloppe est donc celle des trois coniques (V) tangentes à la courbe C et à la droite D qui correspond à la racine λ' choisie. Si, aux cercles (4) qui passent par α_1 et α_2, on substitue les cercles (5) qui passent par α_3 et α_4, l'enveloppe des nouvelles droites mm' est la même conique (V)'.

Les quatre points de rencontre α_1, α_2, α_3, α_4 de la droite D et de la courbe C sont susceptibles de trois groupements deux à deux, et ces trois groupements correspondent aux trois racines de l'équation (2).

3° Supposons la droite D tangente à l'ellipse E. Les points α_1, α_2, α_3, α_4 s'obtiendront en menant à l'ellipse deux tangentes parallèles inclinées dans un sens de l'angle ω sur la droite D, et deux autres tangentes parallèles inclinées du même angle en sens contraire. Le quadrilatère formé par ces quatre tangentes sera un parallélogramme, et, de deux de ses sommets, on verra l'el-

lipse sous un angle 2ω, des deux autres, sous l'angle supplémentaire. L'équation du lieu cherché est donc

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 = k'^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

où $k'^2 = \dfrac{4a^2b^2}{\tan^2 2\omega}$.

Ch. B.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1887;

Par M. Henri FERVAL,

Élève à l'École Normale supérieure.

1° *Démontrer que le lieu des points, tels que les tangentes menées de chacun d'eux à une conique* S *soient conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes menées à une autre conique* S′, *est une troisième conique* Σ *qui passe par les points de contact* $a, b, c, d, a', b', c', d'$ *des tangentes communes aux deux coniques* S *et* S′.

2° *La conique* S *étant une ellipse donnée, et la conique* Σ *un cercle donné, trouver l'équation de la conique* S′.

3° *Démontrer qu'il existe quatre circonférences de cercles réelles passant chacune par deux foyers de la conique* S *et deux foyers de la conique* S′.

4° *Soient* a *et* a' *les points de contact de* S *et* S′ *avec l'une de leurs tangentes communes. Démontrer que si* a' *est la projection du centre de la conique* S *sur la tangente commune, les normales à* S′ *aux points* b', c', d' *se coupent en un point* M *qui reste fixe, quand* Σ *varie de façon à passer constamment en* a *et* a'.

1° Pour axes de coordonnées, nous prendrons les axes de S; les équations de S et S′ seront

(S) $$a^2u^2+b^2v^2-1=0,$$

(S′) $$Au^2+2Buv+Cv^2+2Du+2Ev+F=0.$$

Soit un point

$$ux + vy - 1 = 0;$$

les points à l'infini, situés sur les tangentes menées de ce point aux deux coniques, satisfont aux relations

$$(a^2 - x^2)u^2 - 2xy\,uv + (b^2 - y^2)v^2 = 0,$$
$$(A + 2Dx + Fx^2)u^2 + 2(B + Dy + Ex + Fxy)uv$$
$$+ (C + 2Ey + Fy^2)v^2 = 0.$$

En écrivant que ces points forment une division harmonique, on trouve, pour l'équation du lieu,

$$-2xy[B + Dy + Ex + Fxy]$$
$$= (b^2 - y^2)(A + 2Dx + Fx^2) + (a^2 - x^2)(C + 2Ey + Fy^2),$$

ou, en réduisant,

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} &(Fb^2 - C)x^2 + 2Bxy + (Fa^2 - A)y^2 \\ &\quad + 2Db^2x + 2Ea^2y + Ab^2 + Ca^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Montrons que la conique Σ passe aux huit points de contact des tangentes communes à S et S′.

Les coordonnées de la tangente à S au point (x, y) sont :

$$u = \frac{x}{a^2}, \qquad v = \frac{y}{b^2};$$

exprimons qu'elles vérifient (S′), et nous obtenons la condition

$$\frac{Ax^2}{a^4} + \frac{2Bxy}{a^2b^2} + \frac{Cy^2}{b^4} + \frac{2Dx}{a^2} + \frac{2Ey}{b^2} + F = 0.$$

Remplaçons, dans cette relation, $\frac{x^2}{a^2}$ par $1 - \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$ par $1 - \frac{x^2}{a^2}$, F par $F\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$, et nous retrouvons l'équation de Σ; la conique Σ passe donc au point (x, y).

Elle passe de même aux sept autres points de contact des tangentes communes à S et S′.

De cette propriété, il résulte que le triangle autopolaire de S et S′ est conjugué par rapport à Σ.

2° Identifions Σ avec le cercle

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2ny + p = 0,$$

et nous obtenons les relations

$$B = 0, \quad \frac{Fb^2 - C}{1} = \frac{Fa^2 - A}{1} = \frac{Db^2}{m} = \frac{Ea^2}{n} = \frac{Ab^2 + Ca^2}{p};$$

d'où nous tirons

$$F = \frac{A - C}{c^2} = \frac{A(p + a^2 + b^2)}{(p + c^2)a^2}, \qquad E = \frac{2nA}{p + c^2}\frac{b^2}{a^2},$$
$$D = \frac{2mA}{p + c^2}, \qquad C = \frac{p - c^2}{p + c^2}\frac{b^2}{a^2}A,$$

et l'équation de S′ est alors

$$a^2(p + c^2)u^2 + b^2(p - c^2)v^2 + 2ma^2u + 2nb^2v + p + a^2 + b^2 = 0.$$

D'après ce qui a été dit dans la première Partie, cette conique admet pour triangle conjugué le triangle autopolaire de S et du cercle donné.

3° Les quatre cercles que nous devons trouver ont pour centres les quatre points d'intersection des axes de S avec ceux de S′.

Soit un cercle contenant les deux foyers imaginaires de S,

(C) $$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c^2 = 0.$$

Pour qu'un point (x, y) soit un foyer de S′, il faut que les points à l'infini situés sur les tangentes menées de ce point à S′ soient confondus avec les ombilics, c'est-à-dire que l'on ait

(1) $$\left\{\begin{array}{l} Fxy + Ex + Dy = 0, \\ A + 2Dx + Fx^2 = C + 2Ey + Fy^2 \\ \text{ou} \\ F(y^2 - x^2) - 2Dx + 2Ey - Fc^2 = 0. \end{array}\right.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de S′; le cercle a pour nouvelle équation

$$(\mathrm{C}')\quad \begin{cases} x^2+y^2-2\left(\lambda+\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)x \\ \qquad -2\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}y+\dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}+\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+c^2+2\lambda\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}=0, \end{cases}$$

et les hyperboles focales (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases} y^2-x^2-\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+\dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}-c^2=0, \\ xy-\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{F}^2}=0. \end{cases}$$

La combinaison par homogénéité des deux équations (2) nous donne l'équation aux axes de (S′),

$$(3)\quad \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{F}^2}(y^2-x^2)+\left(\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}-\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}-c^2\right)xy=0.$$

L'axe de S′, qui passe au centre du cercle considéré, a pour coefficient angulaire

$$\frac{\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}}{\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}+\lambda};$$

l'axe perpendiculaire sera

$$y=-\frac{\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}+\lambda}{\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}}x.$$

Écrivons que cet axe coupe le cercle (C′) et la seconde hyperbole (2) aux mêmes points : nous trouvons la condition

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}=\left(\lambda+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)\frac{-\dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{F}^2}+\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+c^2+2\left(\lambda+\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}}{\dfrac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{F}^2}+\left(\lambda+\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{F}}\right)^2},$$

ou

$$(4)\quad \begin{cases} \theta(\lambda) = \dfrac{D}{F}\left(\lambda + \dfrac{D}{F}\right)^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{E^2}{F^2} - \dfrac{D^2}{F^2} + c^2\right)\left(\lambda + \dfrac{D}{F}\right) - \dfrac{E^2 D}{F^3} = 0. \end{cases}$$

Cette condition est vérifiée, puisqu'elle exprime que la droite $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\frac{E}{F}}{\frac{D}{F} + \lambda}$ est une direction d'axes de l'ellipse S'.

Aux deux valeurs de λ, tirées de l'équation (4), correspondent donc deux cercles passant aux foyers imaginaires de S et contenant l'un les foyers réels, l'autre les foyers imaginaires de S'.

Les deux racines de l'équation (4) sont manifestement réelles; mais, pour que les deux cercles correspondants soient réels, il faut que leurs rayons soient réels, en d'autres termes, que l'on ait

$$\lambda^2 - c^2 > 0.$$

Substituons c et $-c$ dans $\theta(\lambda)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \theta(c) &= a^2\frac{D}{F} + c\left(\frac{E^2}{F^2} + \frac{D^2}{F^2} + c^2\right) + c^2\frac{D}{F} \\ &= c\left[\left(c + \frac{D}{F}\right)^2 + \frac{E^2}{F^2}\right] > 0, \\ \theta(-c) &= c^2\frac{D}{F} - c\left(\frac{E^2}{F^2} + \frac{D^2}{F^2} + c^2\right) + c^2\frac{D}{F} \\ &= -\left[\left(-c + \frac{D}{F}\right)^2 + \frac{E^2}{F^2}\right] < 0. \end{aligned}$$

Ces résultats montrent qu'il y a toujours une racine de l'équation (4) comprise entre $+c$ et $-c$, et une autre extérieure à $+c$ et $-c$.

La première racine donne un cercle imaginaire, c'est celui qui renferme les quatre foyers imaginaires des deux coniques, et l'autre donne un cercle réel.

On verra de la même façon qu'il y a un troisième

cercle passant aux deux foyers réels de S, aux deux foyers imaginaires de S′, et ce cercle est réel; un quatrième cercle passant aux deux foyers imaginaires de S, aux deux foyers réels de S′, et ce cercle est réel.

Ainsi, les quatre cercles dont il est parlé dans l'énoncé ne sont pas tous réels; il y en a un qui est imaginaire.

Remarque. — La propriété que nous venons de démontrer résulte immédiatement de ce fait que Σ est un cercle. En effet, puisque les tangentes menées de chaque point cyclique à S et S′ forment un faisceau harmonique, les deux faisceaux de quatre tangentes issues des deux points cycliques sont homographiques, et les points d'intersection de leurs droites homologues appartiennent à une conique passant aux points cycliques, c'est-à-dire à un cercle. Comme on peut combiner les droites des deux faisceaux de quatre manières différentes, il y a quatre cercles passant par deux foyers de S et deux foyers de S′.

Les centres de ces quatre cercles étant réels, trois d'entre eux, qui contiennent des foyers réels, sont nécessairement réels.

4° Pour démontrer plus commodément la quatrième Partie, au lieu de rapporter S à ses axes, nous prendrons la tangente $a'a$ pour axe des x, la normale à S′ pour axe des y, et nous poserons $a'a = d$.

La conique S, qui est tangente à $a'x$ au point a et a son centre sur $a'y$, est définie par l'équation

$$(\mathrm{S}) \qquad \mathrm{A}u^2 - 2\mathrm{E}\,duv + 2\mathrm{E}v + \mathrm{F} = 0,$$

et la conique S′, tangente en a' à $a'x$, a pour équation

$$(\mathrm{S}') \qquad \mathrm{A}'u^2 + 2\mathrm{D}'u + 2\mathrm{E}'v + \mathrm{F}' = 0,$$

ou, en coordonnées ponctuelles,

$$(\mathrm{S}') \qquad \mathrm{E}'^2x^2 - 2\mathrm{D}'\mathrm{E}'xy + (\mathrm{D}'^2 - \mathrm{A}'\mathrm{F}')y^2 - 2\mathrm{A}'\mathrm{E}'y = 0.$$

En nous servant des équations tangentielles des deux coniques S et S′, comme nous l'avons fait dans la première Partie, nous trouvons pour équation de la conique Σ

$$(\Sigma)\ \left\{\begin{aligned}&(AF'+FA')y^2+2E(D'+F'd)xy-2EE'x^2\\&\qquad+2EE'dx+2(AE'+EA'+D'Ed)y=0.\end{aligned}\right.$$

On voit bien qu'elle passe en a et a'. Pour qu'elle soit un cercle, il faut que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned}&AF'+FA'=-2EE',\\&D'+F'd=0;\end{aligned}\right.$$

cette dernière condition exprime que le centre de S′ se trouve sur la normale en a à la conique S. L'équation du cercle (Σ) devient alors

$$(\Sigma')\qquad x^2+y^2-dx-\frac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}y=0.$$

Écrivons les équations (S′) et (Σ′) comme il suit :

$$x(E'^2x-D'E'y)=-y[(D'^2-A'F')y-D'E'x-2A'E'],$$

$$x(x-d)=-y\left(y-\frac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}\right),$$

et combinons-les par division, nous obtiendrons une conique (H) passant en b', c', d', et ne contenant plus le point a',

$$(H)\quad \frac{E'^2x-D'E'y}{x-d}=\frac{(D'^2-A'F')y-D'E'x-2A'E'}{y-\dfrac{AE'+EA'+D'Ed}{EE'}}.$$

Les coefficients de x^2 et y^2 étant égaux et de signes contraires dans cette équation, H est une hyperbole équilatère. Les directions asymptotiques sont définies

par l'équation

$$-D'E'm^2 + (E'^2 - D'^2 + A'F')m + D'E' = 0,$$

qui montre qu'elles sont parallèles aux axes de S'.

Les normales en b', c', d' concourront en un point M, si cette hyperbole équilatère H passe au centre de S'; car, sous cette condition, elle peut toujours être identifiée avec une hyperbole aux pieds des normales. Or, les coordonnées du centre de S', d et $\frac{E'}{D'}d$, annulent les deux termes du premier membre de (H); il en résulte, comme il vient d'être dit, que les normales en b', c', d' se rencontrent en M.

Pour avoir la position du point M, nous couperons l'hyperbole H par la droite $x = 2d$, qui est la normale à S' au point $\left(2d, 2\frac{E'}{D'}d\right)$, symétrique de a' par rapport à son centre $\left(d, \frac{E'}{D'}d\right)$. Les racines de l'équation aux ordonnées des points d'intersection ayant pour produit

$$\frac{A}{E} \times 2\frac{E'}{D'}d,$$

les coordonnées du point M sont $2d$ et $\frac{A}{E}$. On voit qu'elles ne dépendent pas du cercle Σ, mais seulement de la conique donnée S.

Remarque. — Nous avons vu, par la condition

$$D' + F'd = 0,$$

que le centre de S' se projette sur aa' au point a; les deux coniques S et S' sont donc, l'une par rapport à l'autre, dans les mêmes conditions, et le cercle Σ est, pour S, un cercle de Joachimstahl, comme il l'est pour S'.

Note. — La même question a été résolue d'une manière analogue par MM. Loye et Sentou, par M. le capitaine E. Barisien, et par M. Paul Dauvin, professeur au collège de Beauvais.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1887 (¹);

PAR M. E. BARISIEN.

1° Soient a et b les coordonnées du point ω par rapport aux axes Ox et Oy. L'équation de la droite $A\omega B$ est de la forme

$$(1) \qquad y - b = m(x - a).$$

Celle de la droite perpendiculaire ωCD est

$$(2) \qquad y - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

L'équation générale des coniques tangentes aux points d'intersection de la droite AB avec le système des deux droites Ox et Oy est de la forme

$$[y - b - m(x - a)]^2 - 2\lambda xy = 0$$

ou, en développant,

$$y^2 + m^2x^2 - 2(m + \lambda)xy + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

Exprimons que cette conique est une parabole : nous aurons entre λ et m la relation

$$m(2m + \lambda) = 0;$$

d'où

$$\lambda = -2m.$$

(¹) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. VI, p. 325.

L'équation de la parabole tangente en B et A aux axes Ox et Oy est donc en fonction du seul paramètre m,

$$(3)\qquad (y + mx)^2 + 2(y - mx)(ma - b) + (ma - b)^2 = 0.$$

L'équation de l'axe de cette parabole P est de la forme

$$y + mx + \mu = 0,$$

et celle de la tangente au sommet de la forme

$$my - x + \nu = 0,$$

de telle sorte que l'on peut écrire l'équation de la parabole de la façon suivante

$$(4)\qquad (y + mx + \mu)^2 = 2\rho(my - x + \nu),$$

les quantités μ, ρ, ν restant à déterminer par l'identification des équations (3) et (4). Cette identification fournit les trois relations

$$\mu - m\rho = ma - b,$$
$$\mu m + \rho = -m(ma - b),$$
$$\mu^2 - 2\rho\nu = (ma - b)^2,$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$\mu = (ma - b)\frac{1 - m^2}{1 + m^2},$$

$$\rho = -\frac{2m(ma - b)}{1 + m^2},$$

$$\nu = \frac{m(ma - b)}{1 + m^2}.$$

L'équation de l'axe de la parabole (3) est donc

$$(5)\qquad y + mx + (ma - b)\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0.$$

Quant à la directrice, comme elle est perpendiculaire à l'axe et qu'elle passe par le point O, puisque les tan-

gentes issues de ce point sont rectangulaires, son équation est

$$(6) \qquad my - x = 0.$$

En changeant dans les équations (5) et (6) m en $-\frac{1}{m}$, on obtiendra les équations de l'axe et de la directrice de la seconde parabole P'. Ces équations sont par suite

$$(7) \qquad my - x - (mb + a)\frac{1 - m^2}{1 + m^2} = 0$$

pour l'axe, et

$$(8) \qquad y + mx = 0$$

pour la directrice.

2° Le lieu du point de concours des droites (5) et (6), qui sera évidemment le même que le lieu du point de concours de (7) et (8), s'obtiendra en éliminant m entre (5) et (6), par exemple. La valeur de m tirée de (6) et portée dans (5) conduit à l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)(ax - by).$$

C'est une courbe du quatrième degré, fermée, ayant un point triple à l'origine, et pour tangentes en ce point les bissectrices de l'angle des axes et la droite

$$y = \frac{a}{b}x.$$

3° Pour avoir le lieu du point de concours des axes, il faut éliminer m entre les équations (5) et (7).

Pour cela, résolvons d'abord ces équations par rapport à x et y; elles deviennent

$$x = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2}[2mb + a(1 - m^2)],$$

$$y = \frac{1 - m^2}{(1 + m^2)^2}[b(1 - m^2) - 2ma].$$

On en déduit les relations

$$x^2 - y^2 = \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2}(a^2 + b^2),$$

$$ax + by = \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m^2)^2}(a^2 + b^2),$$

qui montrent que l'on a

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

ce qui indique que le lieu demandé est le cercle décrit sur $O\omega$ comme diamètre.

Il est à remarquer que l'énoncé parle à tort d'un second cercle, comme lieu du point de concours des axes.

4° Déterminons les coordonnées du foyer par cette condition qu'il est le pôle de la directrice.

L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) de la parabole (3) est

$$\begin{aligned} x[m(y_1 + mx_1) - m(ma - b)] \\ + y[y_1 + mx_1 + ma - b] \\ + (ma - b)(y_1 - mx_1) + (ma - b)^2 = 0. \end{aligned}$$

Identifions cette équation avec l'équation (6) de la directrice : nous avons alors

$$y_1 - mx_1 + ma - b = 0,$$

$$\frac{m[y_1 + mx_1 - ma + b]}{-1} = \frac{y_1 + mx_1 + ma - b}{m}.$$

Ces deux relations peuvent s'écrire

$$y_1 - mx_1 = b - ma,$$

$$y_1 + mx_1 = (ma - b)\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1};$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = \frac{m(ma - b)}{m^2 + 1}, \qquad y_1 = -\frac{ma - b}{m^2 + 1}.$$

Telles sont les coordonnées du foyer de la parabole P.

On trouverait de même, pour celles du foyer de la parabole P′,

$$x_2 = \frac{a + mb}{m^2 + 1}, \qquad y_2 = \frac{m(a + mb)}{m^2 + 1}.$$

Par suite, on a pour la distance D des deux foyers

$$D^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2 + b^2,$$

ce qui indique que cette distance est constante et égale à Oω.

QUELQUES REMARQUES GÉOMÉTRIQUES A PROPOS DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE;

Par un Ancien Élève de Mathématiques spéciales.

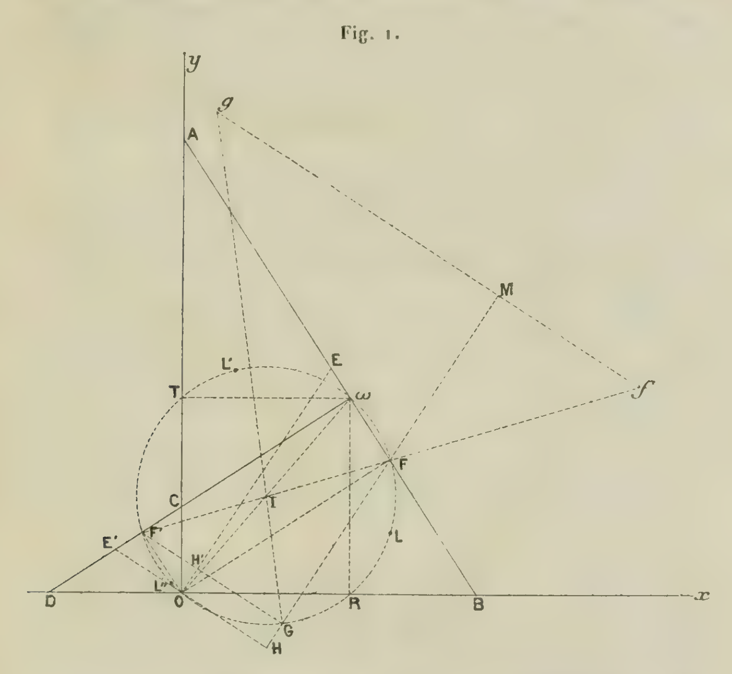
Le pied F (*fig.* 1) de la perpendiculaire abaissée de O sur AB est le foyer de la parabole P. De même F′ est le foyer de la parabole P′. Cette construction des foyers montre que *les foyers* F, F′ *des paraboles* P, P′, *lorsque* AB *tourne autour de* ω, *appartiennent à la circonférence* I *décrite sur* Oω *comme diamètre; la distance* FF′ *de ces foyers est égale à* Oω, *c'est-à-dire constante.*

Prenons les milieux E, E′ des segments AB, CD : la droite OE est un diamètre de P et OE′, un diamètre de P′. Les droites OE, OE′ sont à angle droit. L'axe de P est la parallèle FG à OE et l'axe de P′ est la parallèle F′G à OE′. On voit tout de suite que *les axes des paraboles* P, P′ *sont à angle droit; le point de rencontre* G *de ces axes appartient à la circonférence* I.

Les directrices des paraboles passent par le point O, qui est le sommet d'angles droits circonscrits à ces

courbes. La directrice de P est OE′ perpendiculaire à l'axe FG et la directrice de P′ est OE perpendiculaire à l'axe F′G. Les points de rencontre des directrices avec les axes sont alors les projections H, H′ de O sur les axes FG, F′G; donc : *le lieu des points de rencontre des axes*

Fig. 1.



et des directrices est la podaire de O *par rapport à l'enveloppe des axes de* P *et de* P′.

Occupons-nous de cette enveloppe. L'axe FG et la droite FB sont également inclinés sur Ox, de même pour F′G et F′D.

La courbe enveloppe des axes est donc l'enveloppe de droites partant des extrémités de cordes de I, issues de ω, et qui font avec Ox des angles respectivement égaux aux angles de ces cordes avec cette droite.

Si l'on fait tourner ωF d'un certain angle autour de ω, la droite FG tourne d'un angle égal. La mesure de ce dernier angle est la moitié de l'arc parcouru par G diminué de la moitié de l'arc parcouru par F. L'angle que décrit la corde ωF a pour mesure la moitié de l'arc parcouru par F. En égalant ces deux mesures, on voit que *l'arc parcouru par* G *est double de l'arc parcouru par* F.

Par suite, *l'enveloppe des axes des paraboles est une hypocycloïde à trois rebroussements circonscrite à la circonférence* I.

Lorsque, en vertu du déplacement de l'axe FG, les points F et G sont venus se confondre en L, l'arc GL est égal à deux fois l'arc FL ; de même pour L', l'arc GOL' est égal à 2FL'.

Relativement à l'axe F'G, que l'on déplace de façon que F' et G viennent se confondre, on a L'' tel que l'arc G''L'' est égal à 2F'L'' et aussi le point L' tel que l'arc GωL' est égal à 2F'L'.

Il est donc facile de construire les points L, L', L'' qui sont, comme nous allons le voir, les points de contact de l'hypocycloïde avec I [1].

Appelons M le point où FG touche son enveloppe et $d\varphi$ l'angle infiniment petit dont tourne ωF autour de ω. Élevons en M la perpendiculaire à MF ; cette droite rencontre en g et f les rayons GI, FI de la circonférence I.

L'arc parcouru par G, pour un déplacement infiniment petit de FG, est égal à $Gg\,d\varphi$; de même l'arc parcouru par F est égal à $Ff\,d\varphi$. Mais le premier de ces arcs est double de l'autre : donc $Gg = 2Ff$.

Les triangles gMG, fMF étant semblables, on a alors

---

[1] On détermine aussi L, L', L'' en partageant en trois parties égales les arcs sous-tendus par les cordes OR, OT perpendiculaires à Ox, Oy.

aussi $MG = 2MF$. Cela montre que *l'on obtient le point* M *où* FG *touche son enveloppe en prolongeant* GF *de sa propre longueur*.

D'après cela, *lorsque la corde* FG *devient la tangente en* L *à* I *le point* L *est le point de contact de l'hypocycloïde avec* I. De même pour L′ et L″. La construction de L, L′, L″ montre facilement que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral ([1]).

Si la droite telle que AB menée par ω fait avec les axes un triangle isoscèle, la perpendiculaire abaissée sur cette droite est l'axe de la parabole correspondante. Cet axe, bissectrice de l'angle xoy, est l'une des tangentes menées de l'origine à l'hypocycloïde. L'autre bissectrice de l'angle xoy est une autre tangente à cette courbe. La troisième tangente est la droite symétrique, par rapport aux axes, de la droite Oω.

La perpendiculaire élevée du point O à cette dernière droite est tangente en O à la podaire de ce point par rapport à l'hypocycloïde. Les deux autres tangentes en O à cette courbe sont aussi les bissectrices des angles des axes.

Puisque le lieu des points, tels que G, point de rencontre des axes FG, F′G, est la circonférence I, on peut dire : *la circonférence* I *est le lieu des sommets d'angles droits circonscrits à l'hypocycloïde à trois rebroussements*.

On peut ajouter, en s'appuyant sur la construction du point M, que *les cordes de contact de ces angles droits ont leurs points milieux sur la circonférence* I.

La tangente en M à l'hypocycloïde rencontre I de fa-

([1]) Les points L, L′, L″ répondent à cette question : *déterminer un point* L *tel que la corde* ωL *et la tangente en* L *à* I *soient également inclinées sur* Ox.

çon que FM = GF, et cela constamment lorsqu'on déplace FG; de là résulte que *le centre de courbure de l'hypocycloïde à trois rebroussements s'obtient en prolongeant gf de sa propre longueur.*

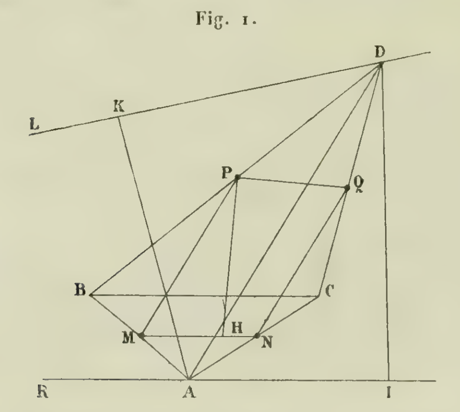
Ou encore, puisque gM est double de Mf : *ce centre de courbure s'obtient en prolongeant* Mf *de trois fois sa longueur.*

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE EN PHILOSOPHIE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1884;

Par M. Gaston-Henri NIEWENGLOWSKI,
Élève de Philosophie au lycée Louis-le-Grand
(classe de M. Lignières).

Étant donnés un triangle ABC (*fig.* 1) *et une droite* L *qui n'est pas située dans le plan du triangle, on*

Fig. 1.



joint aux points B, C *un point quelconque* D *de la droite* L, *de manière à former un quadrilatère* DBAC

dont les côtés ne sont pas nécessairement dans un même plan :

1° *Démontrer que le quadrilatère qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère* DBAC *est un parallélogramme ;*

2° *Étudier les variations de la surface de ce parallélogramme ;*

3° *Trouver la position que le point* D *doit occuper sur la droite* L *pour que le parallélogramme soit un rectangle ou un losange ;*

4° *Examiner si le parallélogramme peut devenir un carré.*

1° Soient M, N, P, Q les milieux des côtés; les droites MN et PQ étant toutes deux parallèles à BC et égales à la moitié de BC, le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2° Si nous prenons MN pour base, en abaissant PH perpendiculaire sur MN, l'expression de la surface sera

$$S = MN \times PH.$$

La longueur de la droite PH variant seule avec la position du point D sur L, les variations de la surface sont proportionnelles à celles de PH. Par le point A menons la parallèle R à BC, et abaissons DI perpendiculaire sur R. Les deux triangles PMH et DAI rectangles en H et en I, et ayant leurs angles aigus en M et en A égaux (côtés parallèles et dirigés dans le même sens) sont semblables et donnent

$$\frac{PH}{DI} = \frac{PM}{DA} = \frac{1}{2},$$

ce qui montre que les variations de PH, et par suite de S, sont proportionnelles aux variations de DI.

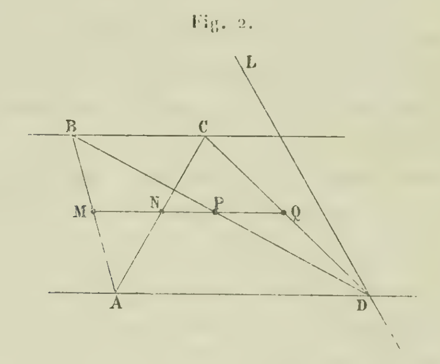
Il est facile de voir que la surface S n'a pas de maximum.

Elle sera maximum quand DI sera perpendiculaire à la fois sur L et sur R. Dans le cas où la droite L est parallèle au plan du triangle ABC, la perpendiculaire commune est aussi perpendiculaire au plan du triangle ABC.

Dans le cas où L est parallèle à R, DI est constant et la surface est aussi constante, quelle que soit la position du point D; dans ce cas, le parallélogramme s'allonge indéfiniment.

Enfin, lorsque la droite L se confond avec la droite R, il est facile de voir que les quatre points M, N, P, Q

Fig. 2.



sont en ligne droite et S prend alors une valeur nulle (*fig.* 2).

Il en est de même quand, la droite L coupant la droite R, le point D prend la position de leur intersection.

3° Le parallélogramme MNPQ sera un rectangle quand il aura un de ses angles droit, PMN par exemple. Mais alors PH se confondra avec PM, et par suite DI se confondra aussi avec DA. La position du point D sera donc donnée par l'intersection de la droite L et du plan mené par A perpendiculairement à R.

Le parallélogramme MNPQ sera un losange quand

les diagonales DA, BC du quadrilatère primitif seront égales. Pour avoir la position du point D, on décrira du point A comme centre avec $AD = BC$ une sphère qui coupera L en D et D' ou en D, ou ne la coupera pas. Selon que le rayon AD ou BC sera supérieur, égal ou inférieur à la longueur de la perpendiculaire AK abaissée du point A sur L, on aura 2, 1 ou 0 solutions.

4° Pour que le parallélogramme MNPQ soit un carré, il faut qu'il soit à la fois un losange et un rectangle. Le point D devra donc être :

1° Sur la droite L et sur le plan mené par A perpendiculairement à L;

2° Être tel que $DA = BC$.

Sa position sera donc donnée par le point de rencontre de la droite L et du cercle décrit dans le plan mené par A perpendiculairement à L, du point A comme centre et avec un rayon $AD = BC$. Selon que la droite L coupera, touchera ou ne rencontrera pas le cercle AD, il y aura 2, 1 ou 0 positions du point D répondant à la question.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887.

Philosophie.

1. On donne trois points A, B, C en ligne droite, le point C sur le prolongement de AB. Par les deux points A et B on fait passer un cercle quelconque, auquel on mène du point C deux tangentes, qui le touchent aux points M et N. On demande le lieu du milieu de la corde MN quand on fait varier le rayon du cercle qui passe par les points A et B.

2. On donne une demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre. Une perpendiculaire au diamètre AB rencontre ce diamètre en C et la demi-circonférence en D; sur cette per-

pendiculaire, on prend, à partir du point C, dans le sens CD, une longueur CE égale à AC, et on joint les points D et E au point A et au point B. On demande de déterminer la position du point C, de façon que le rapport du volume engendré par le quadrilatère ADBE, en tournant autour de AB, à la somme des volumes de deux sphères, qui ont pour diamètres l'une AC, l'autre CB, soit égal à un nombre donné λ. Discuter.

Seconde.

1. Dans deux plans parallèles P et Q, on trace deux droites AB et CD non parallèles, et on considère le tétraèdre qui a pour sommets les extrémités de ces droites. Démontrer que, si les droites AB et CD se déplacent dans les plans P et Q en conservant une direction et une longueur invariables, le volume du tétraèdre demeure constant.

2. Une pyramide régulière a pour base un carré; la somme de l'apothème de cette pyramide et du côté de sa base est égale à a, enfin sa surface totale est égale à m^2. Trouver le côté de la base, la hauteur et le volume de cette pyramide. Discussion.

On appliquera les formules au cas où $a = 5^m$ et $m = 4^m$.

Troisième.

1. Soit un quadrilatère ABCD rectangle au point B et dont les trois sommets A, B, C sont invariables; le quatrième sommet D est assujetti à la seule condition que l'angle BDC soit toujours égal à un angle donné de grandeur α. Pour chacune des positions que peut occuper le point D dans le plan du quadrilatère, on divise le côté correspondant AD dans un rapport déterminé, $\frac{3}{7}$ par exemple, c'est-à-dire de telle sorte qu'on ait $\frac{AM}{MD} = \frac{3}{7}$, et, sur AM, on construit un triangle équilatéral. On propose de trouver le lieu du centre du cercle circonscrit à chacun des triangles équilatéraux ainsi obtenus, et de construire.

2. Calculer, à un demi-centimètre près, le côté d'un carré ayant même surface qu'un octogone régulier inscrit dans un cercle de 35^m de rayon.

SUR LA POTENTIELLE TRIANGULAIRE;

PAR M. E. CESARO.

Soient A_1, A_2, A_3 les sommets d'un triangle, dans l'ordre où ils sont rencontrés par un mobile, qui parcourt le périmètre en laissant le triangle à sa gauche. Soient μ_1, μ_2, μ_3 les coordonnées barycentriques d'un point P. Si x_i, y_i sont les coordonnées de A_i, par rapport à deux axes orthogonaux, issus de P, on a par définition

$$(1) \qquad \sum \mu_i x_i = 0,$$

$$(2) \qquad \sum \mu_i y_i = 0,$$

les sommes devant être étendues aux indices 1, 2, 3. Le double de l'aire du triangle étant

$$(3) \qquad \sum (x_2 y_3 - x_3 y_2) = a^2,$$

on déduit de (1) et (2)

$$(4) \qquad \frac{\mu_1}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = \frac{\mu_2}{x_3 y_1 - x_1 y_3} = \frac{\mu_3}{x_1 y_2 - x_2 y_1} = \frac{1}{a^2};$$

μ_1, μ_2, μ_3 représentent donc les rapports des aires des triangles PA_2A_3, PA_3A_1, PA_1A_2, à l'aire de $A_1A_2A_3$. Rappelons, enfin, que l'élément linéaire, en coordonnées barycentriques, est donné par la formule

$$(5) \qquad ds^2 = a^2(\cot A_1\, d\mu_1^2 + \cot A_2\, d\mu_2^2 + \cot A_3\, d\mu_3^2).$$

Supposons que les coordonnées barycentriques de P dépendent d'un paramètre n. Lorsque celui-ci varie, le point considéré décrit une ligne (P). Si l'on prend comme

axes la tangente et la normale à (P), en P, les dérivées des coordonnées de A_i, par rapport à l'arc s, sont

$$(6)\qquad x'_i = \frac{y_i - \rho}{\rho}, \qquad y'_i = -\frac{x_i}{\rho}.$$

Cela posé, remarquons que l'on a

$$(7)\qquad \sum \mu_i = 1, \qquad \sum \mu'_i = \sum \mu''_i = \ldots = 0,$$

et différentions les égalités (1) et (2), en tenant compte de (6). Il vient

$$(8)\qquad \sum \mu'_i x_i = 1,$$

$$(9)\qquad \sum \mu'_i y_i = 0;$$

puis, par une nouvelle dérivation,

$$(10)\qquad \sum \mu''_i x_i = 0,$$

$$(11)\qquad \sum \mu''_i y_i = \frac{1}{\rho}.$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu'_1 & \mu''_1 \\ \mu_2 & \mu'_2 & \mu''_2 \\ \mu_3 & \mu'_3 & \mu''_3 \end{vmatrix}.$$

Il est évident, à cause de (7), que

$$(12)\quad \Delta = \mu'_2\mu''_3 - \mu'_3\mu''_2 = \mu'_3\mu''_1 - \mu'_1\mu''_3 = \mu'_1\mu''_2 - \mu'_2\mu''_1.$$

Cela étant, les formules (1) et (10) donnent, en ayant égard à (8),

$$(13)\quad \frac{x_1}{\mu_2\mu''_3 - \mu_3\mu''_2} = \frac{x_2}{\mu_3\mu''_1 - \mu_1\mu''_3} = \frac{x_3}{\mu_1\mu''_2 - \mu_2\mu''_1} = -\frac{1}{\Delta}.$$

De même, les égalités (2) et (9) donnent, en ayant

égard à (11),

$$(14)\qquad \frac{y_1}{\mu_2\mu_3' - \mu_3\mu_2'} = \frac{y_2}{\mu_3\mu_1' - \mu_1\mu_3'} = \frac{y_3}{\mu_1\mu_2' - \mu_2\mu_1'} = \frac{1}{\rho\Delta}.$$

Les formules (12), (13), (14) font connaître les mineurs de Δ : elles nous disent que le réciproque de ce déterminant est, en vertu de (3),

$$\begin{vmatrix} \Delta & x_1\Delta & y_1\rho\Delta \\ \Delta & x_2\Delta & y_2\rho\Delta \\ \Delta & x_3\Delta & y_3\rho\Delta \end{vmatrix} = a^2\rho\Delta^3.$$

On sait, d'autre part, que le réciproque en question est égal à Δ^2. Donc

$$(15)\qquad a^2\rho\Delta = 1.$$

Nous avons là une relation entre ρ, n, n' ; car, si l'on pose

$$\varphi(n) = \begin{vmatrix} \mu_1 & \dfrac{d\mu_1}{dn} & \dfrac{d^2\mu_1}{dn^2} \\ \mu_2 & \dfrac{d\mu_2}{dn} & \dfrac{d^2\mu_2}{dn^2} \\ \mu_3 & \dfrac{d\mu_3}{dn} & \dfrac{d^2\mu_3}{dn^2} \end{vmatrix},$$

il est évident que

$$(16)\qquad \Delta = n'^3\varphi(n).$$

D'autre part, si l'on fait, pour abréger,

$$(17)\quad \psi(n) = \sqrt{\left(\frac{d\mu_1}{dn}\right)^2 \cot\lambda_1 + \left(\frac{d\mu_2}{dn}\right)^2 \cot\lambda_2 + \left(\frac{d\mu_3}{dn}\right)^2 \cot\lambda_3},$$

on a, d'après (5),

$$(18)\qquad an'\psi(n) = 1;$$

puis, par substitutions successives dans (16) et (15),

$$(19)\qquad \rho = a\frac{\psi^3(n)}{\varphi(n)}.$$

En outre, l'intégration de (18) nous donne

$$(20) \qquad s = a \int \psi(n)\, dn.$$

L'élimination de n entre (19) et (20) conduit à l'équation intrinsèque de (P).

Lorsque les coordonnées barycentriques de P sont proportionnelles aux $n^{\text{ièmes}}$ puissances des côtés correspondants, la ligne (P) prend le nom de *potentielle triangulaire*. Cette courbe a été étudiée par MM. Faure, Lemoine, Brocard, de Longchamps. Nous allons l'étudier à notre tour, en établissant par la géométrie intrinsèque quelques propriétés connues et beaucoup d'autres nouvelles.

Évidemment, la courbe dont il s'agit n'a pas de points hors du triangle, tant que n est réel. Elle contient toujours le barycentre du triangle, le centre du cercle inscrit, le point de Lemoine, les sommets opposés au plus grand et au plus petit côté, etc. A ces points correspondent respectivement, pour n, les valeurs 0, 1, 2, ∞, $-\infty$, etc. C'est ce que l'on vérifie sans peine en observant que, dans le cas actuel,

$$(21) \qquad \frac{\mu_1}{c_1^n} = \frac{\mu_2}{c_2^n} = \frac{\mu_3}{c_3^n} = \frac{1}{c_1^n + c_2^n + c_3^n},$$

c_i étant la longueur du côté opposé à A_i.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\alpha = \sum c_i^n, \qquad \beta = \sum c_i^n \log c_i, \qquad \gamma = \sum c_i^n \log^2 c_i,$$

on a

$$(22) \qquad \alpha^2 \frac{d\mu_1}{dn} = (\alpha \log c_1 - \beta)\, c_1^n, \qquad \ldots,$$

$$(23) \qquad \alpha^3 \frac{d^2\mu_1}{dn^2} = [(\alpha \log c_1 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma]\, c_1^n, \qquad \ldots.$$

Par suite,

$$\alpha^6 \varphi(n) = (c_1 c_2 c_3)^n \begin{vmatrix} 1 & \alpha \log c_1 - \beta & (\alpha \log c_1 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \\ 1 & \alpha \log c_2 - \beta & (\alpha \log c_2 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \\ 1 & \alpha \log c_3 - \beta & (\alpha \log c_3 - \beta)^2 + \beta^2 - \alpha\gamma \end{vmatrix};$$

d'où

$$(24) \qquad \varphi(n) = \lambda \frac{(c_1 c_2 c_3)^n}{\alpha^3},$$

pourvu que l'on pose

$$\lambda = \begin{vmatrix} 1 & \log c_1 & \log^2 c_1 \\ 1 & \log c_2 & \log^2 c_2 \\ 1 & \log c_3 & \log^2 c_3 \end{vmatrix}.$$

De même, si

$$\varepsilon_1 = \log \frac{c_2}{c_3}, \qquad \varepsilon_2 = \log \frac{c_3}{c_1}, \qquad \varepsilon_3 = \log \frac{c_1}{c_2},$$

et

$$(25) \qquad \mathrm{H}^2 = \sum (\varepsilon_2 c_2^{n} - \varepsilon_3 c_3^{n})^2 \cot \mathrm{A}_1,$$

la relation (17) donne

$$(26) \qquad \Psi(n) = \mathrm{H} \frac{(c_1 c_2 c_3)^n}{\alpha^2}.$$

Cela étant, les formules (19) et (20) deviennent, en vertu de (24) et (26),

$$(27) \qquad \rho = \frac{\alpha}{\lambda} (c_1 c_2 c_3)^{2n} \left(\frac{\mathrm{H}}{\alpha}\right)^3,$$

$$(28) \qquad s = a \int (c_1 c_2 c_3)^n \frac{\mathrm{H}\, dn}{\alpha^2}.$$

L'élimination de n entre (27) et (28) donnerait l'équation intrinsèque de la potentielle triangulaire. Si $c_1 > c_2 > c_3$, la potentielle s'étend depuis A_3 jusqu'à A_1, à l'intérieur du triangle, lorsque n varie de $-\infty$ à $+\infty$. Pour voir comment se comporte la courbe aux environs de ses extrémités, il suffit de voir ce que devient (27)

pour des valeurs de n, indéfiniment grandes en valeur absolue. On remarquera d'abord que $\varkappa c_2^{-n}$ croît toujours à l'infini, asymptotiquement à $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^n$ ou à $\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^n$, suivant que n est positif ou négatif. La discussion de H, au moyen de (25), montre ensuite que le second membre de (27) tend à prendre une des formes

$$(29) \qquad \frac{(\varepsilon_3 c_3)^3}{\lambda a^2} \lim \left(\frac{c_2^2}{c_1 c_3}\right)^n, \qquad \frac{(\varepsilon_1 c_1)^3}{\lambda a^2} \lim \left(\frac{c_2^2}{c_1 c_3}\right)^n,$$

suivant que n est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que le point P tend vers A_1 ou vers A_3. Soient r et R les valeurs de ρ en ces points. Si $c_2^2 < c_1 c_3$, on a, d'après (29), $r = 0$, $R = \infty$. Si $c_2^2 > c_1 c_3$, on a $r = \infty$, $R = 0$. Il y a donc deux classes de triangles, bien distinctes au point de vue de leurs potentielles. Ces classes sont nettement séparées par les triangles dont les côtés sont en progression géométrique, et qu'on appelle *triangles moyens*. En effet, pour $c_2^2 = c_1 c_3$, les expressions (29) deviennent

$$(30) \qquad r = \frac{(\varepsilon_3 c_3)^3}{\lambda a^2}, \qquad R = \frac{(\varepsilon_1 c_1)^3}{\lambda a^2}.$$

En outre, dans le cas actuel,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_2, \qquad \lambda = \tfrac{1}{4}\varepsilon_3^2.$$

Par suite, les formules (30) donnent, aux signes près,

$$r = \frac{c_3^3}{2a^2}, \qquad R = \frac{c_1^3}{2a^2}.$$

Ainsi, dans tout triangle moyen, les courbures de la potentielle, aux extrémités du côté moyen, sont proportionnelles aux cubes des côtés opposés. On peut encore écrire

$$2rh_3 = c_3^2, \qquad 2Rh_1 = c_1^2,$$

h_i étant la hauteur issue de A_i. Cela donne lieu à une

construction fort simple. On remarquera que la moyenne géométrique des diamètres des cercles osculateurs, aux extrémités de côté moyen, est égale à la distance de ce côté à l'orthocentre.

Afin de connaître la direction de la courbe, en chacun de ses points, il convient de reprendre les formules (14), qui deviennent, en vertu de (15) et (18),

$$y_1 = \frac{a}{\psi(n)}\left(\mu_2 \frac{d\mu_3}{dn} - \mu_3 \frac{d\mu_2}{dn}\right), \qquad \cdots$$

Dans le cas de la potentielle, ces formules donnent, aux signes près,

$$(31) \qquad \frac{y_1}{\varepsilon_1 c_1^{-n}} = \frac{y_2}{\varepsilon_2 c_2^{-n}} = \frac{y_3}{\varepsilon_3 c_3^{-n}} = \frac{a}{\mathrm{H}},$$

pourvu que l'on ait égard aux formules (21), (22), (26). Si n croît indéfiniment, en valeur absolue, on a, en vertu des considérations asymptotiques indiquées précédemment,

$$y_i = \frac{\varepsilon_i a^2}{\varepsilon_3 c_3} \lim \left(\frac{c_3}{c_i}\right)^n \qquad \text{ou} \qquad y_i = \frac{\varepsilon_i a^2}{\varepsilon_1 c_1} \lim \left(\frac{c_1}{c_i}\right)^n,$$

suivant que n est positif ou négatif. Il en résulte

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_3 = \frac{a^2}{c_3} = h_3, \qquad \text{en } \mathrm{A}_1;$$

$$y_3 = 0, \qquad y_2 = 0, \qquad y_1 = \frac{a^2}{c_1} = h_1, \qquad \text{en } \mathrm{A}_3.$$

La potentielle touche donc les côtés extrêmes du triangle aux extrémités du côté moyen. Elle se dirige parallèlement à ce côté lorsque $y_1 = y_3$, c'est-à-dire d'après (31), pour

$$n = \frac{1}{\varepsilon_2} \log \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

En particulier, pour les triangles moyens, $n = 0$, ce qui définit le barycentre.

On doit être curieux de connaître la nature de la potentielle dans les triangles moyens. Dans ce but, remarquons que l'on a identiquement

$$\sum \varepsilon_1 \log c_1 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c_1^{\varepsilon_1} c_2^{\varepsilon_2} c_3^{\varepsilon_3} = 1.$$

Par suite, les formules (21) donnent

(32) $$\mu_1^{\varepsilon_1} \mu_2^{\varepsilon_2} \mu_3^{\varepsilon_3} = 1.$$

Telle est l'équation barycentrique de la potentielle. Elle devient, pour les triangles moyens, $\mu_2^2 = \mu_1 \mu_3$. C'est une équation homogène, du second degré, qui représente donc une conique. Bien entendu, la courbe doit être limitée à l'arc intérieur au triangle; mais nous verrons que l'arc extérieur fait également partie du lieu, à la condition d'admettre pour n des valeurs imaginaires, convenablement choisies.

Il y aurait une intéressante transformation à étudier dans le plan. Soit q_i la longueur du segment intercepté sur une droite D, à partir d'un point Q, par le côté opposé à A_i. Déterminons Q de manière que

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_2} + \frac{\varepsilon_3}{q_3} = 0.$$

La droite D se mouvant dans le plan, soit P le point où elle touche son enveloppe. Par rapport à la tangente et à la normale à (P), en P, les coordonnées de Q sont faciles à calculer ; l'ordonnée est nulle, et l'abscisse est donnée par l'équation

$$\frac{\varepsilon_1}{p_1 - x} + \frac{\varepsilon_2}{p_2 - x} - \frac{\varepsilon_3}{p_3 - x} = 0.$$

qui est vérifiée par une seule valeur finie de x, à savoir

$$x = -\frac{\sum \varepsilon_1 p_2 p_3}{\sum \varepsilon_1 p_1}.$$

Les quantités p représentent les *abscisses à l'origine* des côtés du triangle fixe. Connaissant les coordonnées de Q, il serait facile d'étudier, par les méthodes intrinsèques, la correspondance des lignes (P) et (Q). Ici nous nous bornons à faire observer que la potentielle triangulaire coïncide avec sa transformée. En effet, pour que, sur D, Q coïncide avec P, il faut que l'on ait

$$(33) \qquad \frac{\varepsilon_1}{p_1} + \frac{\varepsilon_2}{p_2} + \frac{\varepsilon_3}{p_3} = 0.$$

D'ailleurs,

$$p_1 = -\frac{a^2\mu_1}{y_2 - y_3}, \qquad p_2 = -\frac{a^2\mu_2}{y_3 - y_1}, \qquad p_3 = -\frac{a^2\mu_3}{y_1 - y_2},$$

et la dérivation des formules (4) donne, en vertu de (6),

$$a^2\mu'_1 = y_2 - y_3, \qquad a^2\mu'_2 = y_3 - y_1, \qquad a^2\mu'_3 = y_1 - y_2,$$

de sorte que

$$\frac{d}{ds}\log\mu_i = -\frac{1}{p_i}.$$

Conséquemment, l'égalité (33) se change, par intégration, en (32), pour une valeur convenable de la constante arbitraire. Pour les triangles moyens la relation (33) exprime que le segment intercepté par les côtés extrêmes, sur toute tangente à la potentielle, est partagé harmoniquement par le point de contact et par le point de rencontre avec le côté moyen. Cette propriété est évidente, si l'on réfléchit que la potentielle étant, dans le cas actuel, une conique, le côté moyen est la polaire du côté opposé.

La potentielle peut se prolonger au dehors du triangle pour des valeurs imaginaires de n. Changeons n en $n + k\sqrt{-1}$, et voyons ce qu'il faut pour que les coordonnées μ restent réelles. Si u et ω sont le module et

l'argument de α, on a, d'après (21),

$$u\mu_i = c_i^n\, e^{(\omega_i - \omega)\sqrt{-1}},$$

ω_i étant l'argument de $c_i^{k\sqrt{-1}}$. Il en résulte que $\omega_i - \omega$ doit être un multiple de π. Soit $\omega_i - \omega = m_i\pi$, et, par suite,

$$u\mu_i = (-1)^{m_i} c_i^n,$$

c'est-à-dire

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mu_1}{(-1)^{m_1} c_1^n} = \frac{\mu_2}{(-1)^{m_2} c_2^n} = \frac{\mu_3}{(-1)^{m_3} c_3^n} \\ &\qquad = \frac{1}{(-1)^{m_1} c_1^n + (-1)^{m_2} c_2^n + (-1)^{m_3} c_3^n}. \end{aligned}\right.$$

On peut toujours supposer que tous les nombres m soient pairs, ou qu'un seul d'entre eux soit impair. Dans le premier cas, on retombe sur les équations (21) : dans le second, on n'a qu'à changer, dans ces équations, le signe de μ_ν, m_ν étant impair. Le point Q, représenté par les équations (34), est alors dans une relation simple avec le point P, représenté par (21). Ces points sont sur une droite issue de A_ν, et ils divisent harmoniquement le segment de cette droite, intercepté, à partir du sommet, par le côté opposé. Il nous reste à connaître la valeur de ν. Remarquons, dans ce but, que ω_i ne diffère pas de $k\log c_i$, et, par suite,

$$k\varepsilon_1 = \omega_2 - \omega_3 = (m_2 - m_3)\pi, \qquad \ldots.$$

Il faut donc, avant tout, que les nombres ε aient entre eux des rapports commensurables. Si cela a lieu, on peut trouver trois nombres entiers, r_1, r_2, r_3, premiers entre eux, tels que

$$\varepsilon_1 = r_1\varepsilon, \qquad \varepsilon_2 = r_2\varepsilon, \qquad \varepsilon_3 = r_3\varepsilon,$$

et l'on a

$$\frac{r_1}{m_2 - m_3} = \frac{r_2}{m_3 - m_1} = \frac{r_3}{m_1 - m_2} = \frac{\pi}{k\varepsilon}.$$

Un seul des nombres r est pair : c'est r_ν. Lorsque les rapports mutuels des nombres ε sont commensurables, il existe entre les côtés du triangle une relation de la forme

$$c_1^{r_1} c_3^{r_3} = c_2^{r_1+r_3}. \tag{35}$$

On a donc $\nu = 2$ lorsque r_1 et r_3 sont impairs : $\nu = 1$, pour r_1 pair et r_3 impair : $\nu = 3$, pour r_1 impair et r_3 pair. Ainsi, l'indice ν est connu, dès que la relation (35) est donnée.

Lors donc que la détermination des nombres r est possible, la courbe admet des boucles (Q), extérieures au triangle, qui se déduisent de la boucle intérieure (P) par une transformation homologique harmonique, dont le pôle et l'axe sont respectivement le sommet A_ν et le côté opposé. Evidemment, pour $\nu = 2$, on obtient une boucle analogue à (P), tournée en sens inverse, et se raccordant avec (P) aux extrémités du côté moyen. Les deux boucles constituent ainsi une espèce d'ovale, qui devient une ellipse pour $r_1 = r_3$. La forme de la courbe est bien différente lorsque ν est égal à 1 ou à 3. Soit $\nu = 1$, pour fixer les idées. La droite joignant les milieux de $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ rencontre (P) en un point O, dont le transformé est à l'infini, sur OA_1. Cela étant, l'arc OA_3 se transforme en un arc hyperbolique, qui s'étend à l'infini, asymptotiquement à une droite D. Les deux branches se touchent en A_3, et il y a rebroussement en ce point, sans que la courbure y soit nécessairement infinie. De même, l'arc OA_1 donne lieu à une autre branche hyperbolique, se raccordant avec (P) en A_1, de manière qu'il y a inflexion en ce point, sans que la courbure y soit nécessairement nulle. Cette seconde branche s'étend aussi à l'infini, asymptotiquement à D. La construction de D est fort aisée. Cette droite est la transformée de la tangente à (P),

en O : elle rencontre donc cette tangente sur l'axe A_2A_3, et, d'autre part, elle est parallèle à OA_1.

En résumé, la potentielle triangulaire affecte trois formes différentes, en relation avec l'égalité (35). Si une telle égalité n'a pas lieu, la courbe s'arrête aux extrémités du côté moyen. Si l'égalité (35) a lieu, et que les nombres r_1, r_3 soient impairs, la potentielle est une courbe fermée. Enfin, lorsqu'un des nombres r_1, r_3 est pair, la potentielle est une courbe ouverte, ayant deux branches asymptotiques à une même droite, et présentant une inflexion et un rebroussement. Transcendante dans le premier cas, la potentielle est algébrique, de degré pair ou de degré impair, dans les deux autres cas.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE (¹); DÉVIATION, ÉCART NORMAL;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. Nous avons appelé *déviation* en un point d'une ellipse l'angle que la tangente à l'ellipse en ce point fait avec la tangente correspondante au cercle principal.

Cet angle est égal à l'angle que la normale MN fait

(¹) Cette étude fait suite à celles que nous avons publiées dernièrement et dont voici les titres :

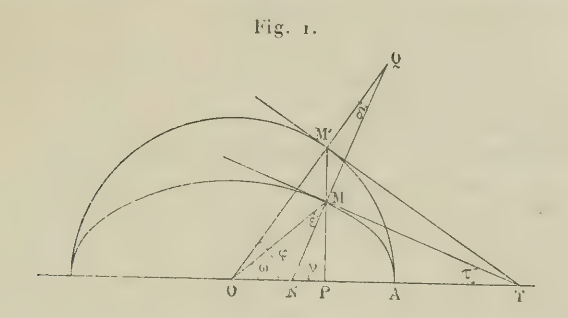
1° *Étude géométrique sur l'ellipse* (*Revue maritime et coloniale*, p. 167; octobre 1886).

2° *De la déviation dans l'ellipse* (*Nouv. Ann. de Math.*, 3ᵉ série, t. V, p. 370 et 534; 1886).

avec le diamètre correspondant OM′ du cercle principal (*fig.* 1).

Les variations de cet angle donnent une indication intéressante sur la nature de l'ellipse considérée. Nous

Fig. 1.



avons fait voir de quelle façon simple elles pouvaient être déduites de celles de l'*anomalie excentrique* ([1]). On trouvera plus loin un autre mode de corrélation géométrique entre ces deux angles.

Auparavant nous ferons observer que l'inclinaison de la normale sur le diamètre correspondant qui s'accuse plus ou moins, suivant que l'ellipse considérée est plus ou moins différente du cercle, mérite aussi d'être envisagée spécialement. Nous appellerons cet angle de la normale et du diamètre en un point de l'ellipse l'*écart normal* en ce point.

Nous développerons plus loin une méthode fort simple qui permet de suivre avec la plus grande facilité les variations simultanées de la *déviation* et de l'*écart normal* lorsqu'on fait varier graduellemet l'*anomalie excentrique*.

Mais nous commencerons par traiter le problème de

([1]) *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. V, p. 534.

l'écart normal comme nous avons fait du problème de la déviation.

2. Si nous désignons par

φ l'anomalie excentrique AOM';
δ la déviation OQN;
ε l'écart normal OMN;
ω l'angle polaire AOM;
τ l'angle MTO de la tangente avec le grand axe;
ν l'angle MNT de la normale avec le grand axe,

nous avons, par la considération du triangle OMT,

$$\varepsilon = \pi - (\omega + \tau) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - (\omega + \tau);$$

donc

$$\cot\varepsilon = \operatorname{tang}(\omega + \tau) = \frac{\operatorname{tang}\omega + \operatorname{tang}\tau}{1 - \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\tau}.$$

Mais on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi,$$

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{b}{a}\cot\varphi.$$

Par suite,

$$\cot\varepsilon = \frac{\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi + \frac{b}{a}\cot\varphi}{1 - \frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi\,\frac{b}{a}\cot\varphi} = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi},$$

ou

(1) $$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\sin 2\varphi.$$

L'écart normal ε atteint évidemment son maximum ε_1 pour la valeur φ_1 de φ, telle que

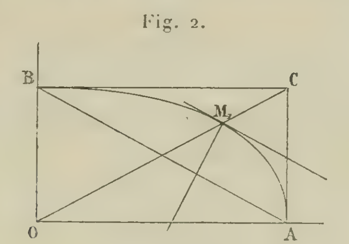
$$\sin 2\varphi_1 = 1,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Le point correspondant de l'ellipse se trouve (*fig.* 2) sur la diagonale OC du rectangle OABC circonscrit au quart d'ellipse, et comme la tangente en ce point est parallèle à AB, on voit que l'écart normal maximum est

Fig. 2.



donné par l'angle que fait la droite OC avec la direction perpendiculaire à AB. Ce résultat se vérifie bien aisément au moyen de la formule (1) où l'on a fait $\sin 2\varphi$ égal à 1.

3. Après cet aperçu rapide sur l'étude directe des variations de l'écart normal, nous allons aborder la méthode dont nous avons parlé en commençant.

Nous commencerons pour cela par résoudre le double problème que voici :

Étant donnés une ellipse rapportée à ses axes et un point quelconque, trouver le lieu des points d'intersection des parallèles aux normales à l'ellipse menées par ce point :

1° *Avec les diamètres correspondants de l'ellipse;*

2° *Avec les diamètres correspondants du cercle principal de cette ellipse.*

La solution de ce problème est immédiate.

Pour le point de l'ellipse dont l'anomalie excentrique est φ, l'équation du diamètre du cercle principal est

$$y = x \tang \varphi; \tag{2}$$

celle du diamètre de l'ellipse,

$$(3)\qquad y = x\,\frac{b}{a}\operatorname{tang}\varphi.$$

D'ailleurs on a

$$\operatorname{tang}\psi = \cot\tau = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi.$$

L'équation de la parallèle à la normale menée par le point donné (α, β) est donc

$$(4)\qquad y - \beta = \frac{a}{b}\operatorname{tang}\varphi(x - \alpha).$$

Éliminant l'angle φ entre les équations (3) et (4), on a la solution de la première partie du problème,

$$(5)\qquad (a^2 - b^2)xy - a^2\alpha y + b^2\beta x = 0.$$

Éliminant l'angle φ entre les équations (2) et (4), on a la solution de la seconde

$$(6)\qquad (a - b)xy - a\alpha y + b\beta x = 0.$$

Arrêtons-nous quelques instants à ces deux équations.

Elles représentent toutes deux des hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes parallèles aux axes de l'ellipse, passant toutes deux par le centre de cette courbe (l'origine) et par le point (α, β).

La première de ces hyperboles [éq. (5)], par suite même de sa définition, passe par les pieds des quatre normales que l'on peut du point (α, β) mener à l'ellipse considérée; la seconde [éq. (6)], en vertu d'un théorème qui sera démontré plus loin (nº 12), passe par quatre des points d'intersection de ces normales et du cercle de rayon $a + b$ concentrique à l'ellipse.

Le centre de la première hyperbole a pour coordonnées

$$x' = \frac{a^2 \alpha}{c^2}, \qquad y' = -\frac{b^2 \beta}{c^2}.$$

Nous retrouvons ainsi un point remarquable que nous avons déjà rencontré dans une autre recherche [1] : *c'est le centre de gravité des points de rencontre de la conique donnée et d'un cercle de rayon quelconque ayant pour centre le point* (α, β).

Nous avons déjà remarqué, *loco citato*, que *ce point est à la rencontre de la droite qui joint les projections orthogonales du point* (α, β) *sur les axes de l'ellipse, avec le diamètre conjugué de celui qui est, par rapport à la bissectrice de l'angle des axes, symétrique de celui qui passe par le point* (α, β).

Cela résulte d'ailleurs immédiatement de ce que, des formules précédentes, on déduit

$$\frac{x'}{\alpha} + \frac{y'}{\beta} = 1,$$

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Le centre de la seconde hyperbole a pour coordonnées

$$x'' = \frac{a\alpha}{a-b}, \qquad y'' = -\frac{b\beta}{a-b}.$$

De ces formules on tire

$$\frac{x''}{\alpha} + \frac{y''}{\beta} = 1,$$

$$\frac{y''}{x''} = -\frac{b}{a}\frac{\beta}{\alpha}.$$

---

[1] *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. V, p. 298; 1886.

Donc, *le centre de la seconde hyperbole est à la rencontre de la droite qui joint les projections orthogonales du point* (α, β) *sur les axes de l'ellipse et du diamètre symétrique par rapport à l'un ou l'autre des axes de celui qui correspond dans l'ellipse au diamètre du cercle principal passant par le point* (α, β).

4. Lorsque le point (α, β) vient se placer sur l'un des axes de l'ellipse, chacune des deux hyperboles se réduit à cet axe et à une droite qui lui est perpendiculaire.

Supposons, en particulier, le point (α, β) situé sur l'axe des x. Alors $\beta = 0$, et les équations (5) et (6) deviennent

$$(a^2 - b^2)\,xy - a^2\alpha y = 0,$$
$$(a - b)\,xy - a\alpha y = 0.$$

Supprimant dans chacune d'elles le facteur y qui correspond à l'axe des x, nous obtenons les équations des deux droites

$$(7) \qquad x = \frac{a^2\alpha}{c^2};$$

$$(8) \qquad x = \frac{a\alpha}{a - b}.$$

Ces deux droites sont parallèles à l'axe des y. Désignons-les par les notations Δ et Δ'.

On voit immédiatement que :

Si $\alpha < a - b$, les droites Δ et Δ' coupent toutes deux l'ellipse en deux points réels ;

Si $\alpha = a - b$, la droite Δ' se confond avec la tangente au sommet A ;

Si $a - b < \alpha < \frac{c^2}{a}$, la droite Δ seule coupe l'ellipse en deux points réels ;

Si $\alpha = \frac{c^2}{a}$, la droite Δ se confond avec la tangente au sommet A;

Si $\frac{c^2}{a} < \alpha$, les deux droites Δ et Δ' sont complètement extérieures à l'ellipse.

Appelons H le point de l'axe des x dont l'abscisse est $a - b$, K celui dont l'abscisse est $\frac{c^2}{a}$, c'est-à-dire *le centre de courbure répondant au sommet* A, et, d'une manière générale, par I le point de l'axe des x dont l'abscisse est α.

Les cinq cas sus-énoncés correspondent aux hypothèses :

I situé entre le centre et le point H;
I confondu avec le point H;
I situé entre le point H et le point K;
I confondu avec le point K;
I situé au delà du point K.

Dans cette dernière hypothèse, il y a lieu de distinguer un cas particulièrement intéressant : c'est celui où le point I vient à coïncider avec le foyer F de l'ellipse. Dans ce cas, $\alpha = c$, et l'on a, pour les équations (7) et (8) des droites Δ et Δ',

$$x = \frac{a^2}{c},$$

$$x = \frac{ac}{a-b}.$$

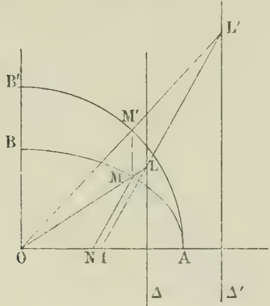
Donc, *la droite* Δ *se confond avec la directrice,* ce qui était à prévoir, puisque la directrice passe par les points de contact de l'ellipse et du cercle bitangent qui a pour centre le foyer, c'est-à-dire par les pieds des

normales (autres que le grand axe) menées du foyer à l'ellipse.

5. Ayant pris sur l'axe des x un point I d'abscisse α, considérons les droites Δ et Δ' qui correspondent à ce point, en vertu des équations (7) et (8).

Prenons un point M *sur l'ellipse. Le diamètre* OM *coupe la droite* Δ *au point* L (*fig.* 3), *le diamètre correspondant* OM' *coupe la droite* Δ' *au point* L'. *D'après la propriété qui a servi à définir les droites* Δ *et* Δ', *la droite* LL' *passe par le point* I *et est parallèle à la normale en* M *à l'ellipse.*

Fig. 3.

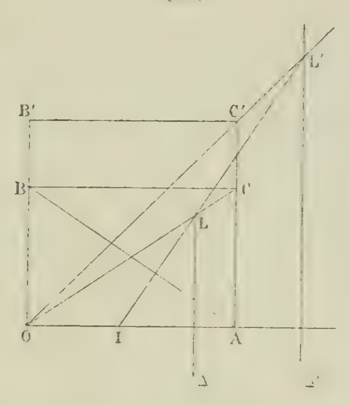


Telle est la relation excessivement simple qui existe entre la direction de la normale MN et celles du diamètre de l'ellipse OM et du diamètre du cercle principal OM' correspondants. De l'une quelconque de ces trois directions, on déduit immédiatement les deux autres.

6. Le problème qui se pose ici est le suivant : *Étant donné le point* I, *construire géométriquement les droites* Δ *et* Δ' *qui lui correspondent.*

Une méthode se présente tout naturellement à l'esprit pour le résoudre : choisir dans l'ellipse un diamètre tel que la normale et le diamètre du cercle principal correspondants soient immédiatement connus. Ce choix est d'ailleurs tout indiqué ; c'est celui du diamètre de l'ellipse qui passe par le point de rencontre C des tangentes aux sommets A et B (*fig.* 4). Le diamètre correspon-

Fig. 4.



dant du cercle principal est la diagonale OC' du carré construit sur le demi grand axe OA. La normale correspondante est perpendiculaire à la droite qui joint les sommets A et B.

Les droites OC *et* OC' *étant tracées, il suffira, du point* I *choisi, d'abaisser sur* AB *une perpendiculaire coupant* OC *en* L *et* OC' *en* L' *pour avoir, en menant par* L *et* L' *des perpendiculaires à* OA, *les droites* Δ *et* Δ'.

Puisque, comme nous l'avons vu, on a pour droite Δ, en prenant pour point I le foyer de l'ellipse, la directrice correspondante, on a ainsi un mode de liaison géométrique très simple entre le foyer et la directrice.

7. *L'angle* OLI (*fig.* 3) *est égal à l'écart normal au point* M; *l'angle* OL'I *est égal à la déviation; l'angle* AOL' *est égal à l'anomalie excentrique.* De là, la méthode que nous avons annoncée en commençant.

Faisant varier l'inclinaison de OL' sur OA de o à $\frac{\pi}{2}$, on suit les variations correspondantes des angles OL'I et OLI qui tous deux partent de zéro pour atteindre chacun un maximum (ces maxima, on va le voir, ne sauraient être simultanés) et décroître ensuite jusqu'à zéro.

8. La détermination des maxima revient au problème suivant :

De quel point d'une droite Δ *voit-on sous un angle maximum un segment de droite* OI *perpendiculaire à* Δ *et situé tout entier d'un même côté par rapport à cette droite?*

On a (*fig.* 5)

$$\widehat{OLI} = \widehat{JIL} - \widehat{JOL}.$$

Fig. 5.

Donc, en posant $OJ = X_1$, $IJ = X_2$, $JL = Y$,

$$\tang \widehat{OLI} = \frac{\frac{Y}{X_2} - \frac{Y}{X_1}}{1 + \frac{Y^2}{X_1 X_2}} = \frac{Y(X_1 - X_2)}{X_1 X_2 + Y^2}.$$

Annulons la dérivée prise par rapport à la variable y; il vient

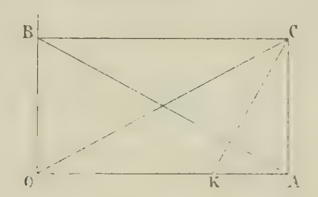
$$Y^2 = X_1 X_2.$$

Ainsi l'angle variable est maximum lorsque JL est moyenne géométrique entre JO et JI. La position correspondante L_1 du point L sera donc à la rencontre de la droite Δ et du cercle décrit sur OI′ pour diamètre, I′ étant le symétrique du point I par rapport à Δ.

9. Nous allons appliquer ce résultat à la recherche du maximum de l'écart normal et de la déviation.

Comme nous pouvons librement choisir le point I, faisons-le d'abord coïncider avec le centre de courbure K répondant au sommet A (*fig.* 6), point qui s'obtient en

Fig. 6.



menant CK perpendiculaire à AB. D'après ce que nous avons vu au n° 4, la droite Δ correspondante n'est autre que la tangente AC au sommet A.

Or, puisque

$$OA = a, \qquad AK = \frac{b^2}{a}, \qquad AC = b,$$

on a

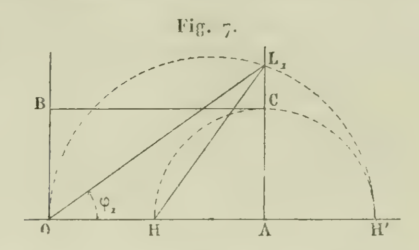
$$\overline{AC}^2 = AO.AK;$$

donc, d'après le lemme, l'écart normal maximum est donné par OCK. D'ailleurs le diamètre du point M correspondant étant OC, on retrouve le résultat obtenu au n° 2.

10. Faisons maintenant coïncider le point I avec le point H d'abscisse $a - b$. La droite Δ' se confond alors avec la tangente AC au sommet A (nº 4).

Si donc nous prenons $AH' = AH = b$, et que le cercle décrit sur OH' comme diamètre coupe AC en L_1, l'angle

Fig. 7.



OL_1H est, en vertu du lemme précédent, égal à la déviation maxima.

L'angle AOL_1 donne l'anomalie excentrique correspondante φ_1, et l'on a

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{AL_1}{OA} = \frac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

On retombe sur le résultat que nous avons déjà obtenu par une autre voie dans l'étude citée au début de cette Note.

11. *Remarque.* — L'anomalie excentrique correspondant au maximum de la déviation étant égale à $\operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{b}{a}}$, et l'anomalie excentrique correspondant au maximum de l'écart normal étant égale à $\frac{\pi}{4}$, on voit que ces deux maxima ne coïncident qu'à la limite, lorsque l'ellipse devient un cercle, c'est-à-dire lorsqu'à la vérité il n'y a plus ni déviation, ni écart normal.

En somme, si l'on part du sommet du grand axe pour aller à celui du petit, on voit que le maximum de la dé-

viation se produit avant celui de l'écart normal et que ces deux maxima sont d'autant plus rapprochés que l'ellipse considérée se rapproche davantage du cercle, c'est-à-dire que le rapport de ses axes est plus voisin de l'unité.

12. Nous allons maintenant démontrer le théorème auquel nous avons fait allusion au n° 3, et qui peut s'énoncer ainsi :

Le lieu du point de rencontre de la normale à l'ellipse et du diamètre correspondant du cercle principal est le cercle de rayon $a+b$ concentrique à l'ellipse.

L'équation de la normale MN (*fig.* 1) est, en fonction de l'anomalie excentrique,

$$b\cos\varphi(y - b\sin\varphi) = a\sin\varphi(x - a\cos\varphi);$$

celle du diamètre correspondant OM′ du cercle principal,

$$y\cos\varphi = x\sin\varphi.$$

Tirant $\cos\varphi$ de la seconde équation pour porter sa valeur en fonction de $\sin\varphi$ dans la première, on tire de celle-ci

$$\sin\varphi = \frac{y}{a+b};$$

dès lors,

$$\cos\varphi = \frac{x}{a+b},$$

et l'équation du lieu du point φ est

$$\frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{x^2}{(a+b)^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = (a+b)^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On déduit de là cette construction fort simple de la normale à l'ellipse :

Prenant sur le cercle principal le point M' *correspondant au point* M, *on prolonge le rayon* OM' *d'une longueur* M'Q *égale au petit axe de l'ellipse. La droite* QM *est normale à l'ellipse en* M.

Nota. — Dans un Mémoire que M. R. Guimaraes vient de publier à part sous le titre de *Semelhança e rectificaçao dos arcos ellipticos,* je remarque les élégantes propriétés que voici des points définis par l'anomalie excentrique φ, telle que $\tang^2\varphi = \frac{b}{a}$, qui sont les points que j'ai appelés *de déviation maxima :*

I. *La différence des arcs déterminés sur un quadrant d'ellipse par le point de déviation maxima situé sur ce quadrant est égale à la différence des demi-axes de l'ellipse.*

II. *Le point de déviation maxima sur un quadrant d'ellipse est le point de contact du cercle inscrit dans le triangle mixtiligne formé par ce quadrant et les tangentes en ces extrémités.*

Cette propriété se déduit immédiatement du théorème de Chasles sur la différence de deux arcs d'ellipse, tels que les tangentes en leurs extrémités forment un quadrilatère circonscriptible au cercle.

SUR LA SECTION D'UNE SURFACE PAR UN PLAN BITANGENT;

Par M. JUHEL-RÉNOY.

Théorème I. — *Soit une surface du quatrième degré, symétrique par rapport à trois plans rectangu-*

laires et présentant un cône de directions asymptotiques double : cette surface est coupée par un plan bitangent suivant deux coniques.

Soit, en effet,

$$(Ax^2+By^2+Cz^2)^2+2(Dx^2+Ey^2+Fz^2)+H^2=0$$

l'équation de la surface S par rapport aux plans de symétrie. Désignons par α l'angle du plan xOy et du plan tangent mené par le centre perpendiculairement au plan xOz. Nous aurons la relation

$$H^2(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)^2=(D\cos^2\alpha+F\sin^2)^2.$$

L'équation de la section de la surface par son plan bitangent s'obtiendra en remplaçant dans l'équation de la surface x par $x\cos\alpha$ et z par $x\sin\alpha$. Cette équation sera

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)^4x^2\\ +2[(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)By^2+D\cos^2\alpha+F\sin^2\alpha]x^2\\ +B^2y^4+2Ey^2+H^2=0.\end{aligned}$$

Résolvons cette équation par rapport à x^2, en tenant compte de la relation qui donne la valeur de α, il vient

$$\begin{aligned}(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)^2x^2\\ +(A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha)By^2+D\cos^2\alpha+F\sin^2\alpha=\pm Ky.\end{aligned}$$

La section se compose donc de deux coniques, ayant pour axe l'axe Oy.

Théorème II. — *Toute quadrique bitangente à la surface* S *et présentant le même cône de directions asymptotiques coupe la surface* S *suivant deux coniques.*

Soient, en effet, a, b, a', b' les points d'intersection de la surface S avec l'axe Ox et supposons que la quadrique passe par les points b et a'. Son équation sera

$$Ax^2+By^2+Cz^2-2x\sqrt{\frac{-(D+AH)}{2}}-H=0.$$

Cherchons l'intersection de cette quadrique avec la surface S. Pour cela, remplaçons dans l'équation de la surface $Ax^2 + By^2 + Cz^2$ par

$$2x\sqrt{\frac{-(D+AH)}{2}} + H.$$

Il vient

$$Ey^2 + Fz^2 - H\left[Ax^2 - 2x\sqrt{\frac{-(D+AH)}{2}} - H\right] = 0:$$

d'où

$$(E + BH)y^2 + (F + CH)z^2 = 0.$$

C'est l'équation de deux plans perpendiculaires au plan zOy et bitangents à la surface S.

Ce théorème permet de déterminer la nature des coniques C suivant lesquelles la surface S est coupée par son plan bitangent. Dans le cas où la surface S est de révolution, autour de l'axe des z par exemple, la détermination du centre de la conique C et de la longueur de l'axe suivant Oy est facile. Supposons d'abord que la conique C soit une ellipse. Cette ellipse doit couper la trace du plan bitangent sur le plan zOx et elle doit couper l'axe Ox à des distances de O égales à Ob et Oa'. La longueur de son axe suivant Oy est donc ba' et son centre est à une distance de O égale à la moitié de ab. Si c représente le milieu de ab, le demi-axe suivant Oy est égal au rayon moyen Oc de la surface et le centre est à une distance de O égale à ac. Si, au contraire, la conique C est une hyperbole, son axe est égal à ab et son centre est à une distance de O égale à Oc.

Conséquences. — Si la surface S est de révolution et si la courbe méridienne passe par les points cycliques du plan, les courbes C sont des cercles. Ainsi la section du tore par un plan bitangent ou par une sphère bitangente se compose de deux cercles.

La surface de révolution engendrée par la courbe Σ, lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant, tournant autour de son axe non focal, est coupée par un plan bitangent ou par une sphère bitangente suivant deux cercles.

Nous terminerons cette Note par la *construction des tangentes au point double de la section de la surface* S *par un plan bitangent, au cas où la surface* S *est de révolution.*

Soient (o', o) le centre de la surface, $P'\alpha P$ le plan bitangent et (m', m) le point de contact. Supposons que la section se compose de deux ellipses et rabattons-la sur le plan vertical passant par l'axe. Le centre d'une des ellipses vient en un point d, tel que $o'd = ac$, sur la perpendiculaire en o' à $P'\alpha$, et son demi-axe est

$$de = de' = o'c.$$

Soit $m'g$ le rabattement de la tangente. On a la relation

$$do'.dg = de^2 \qquad \text{ou} \qquad ac.dg = \overline{o'c}^2.$$

Sur ab, comme diamètre, décrivons un cercle; soit f le point de contact de la tangente menée de o' à ce cercle, et soit h le point de rencontre de $o'o$ avec cf; on a

$$\overline{o'c}^2 = ac.ch.$$

Donc

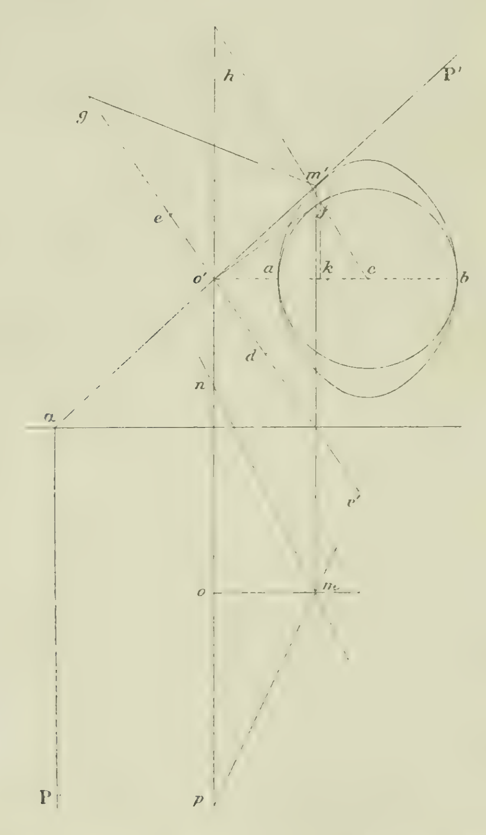
$$dg = ch, \qquad \text{d'où} \qquad o'g = fh.$$

La construction est donc la suivante :

Sur ab comme diamètre, décrire un cercle; mener du point o' une tangente à ce cercle; tracer cf perpendiculaire à $o'f$, qui coupe le cercle en f et oo' en h, et prendre sur oo', à partir du point o, les longueurs $on = op = fh$.

Les tangentes au point double sont les droites mn et mp.

Dans le cas du tore en particulier, la construction est des plus simples. Le point f se confondant avec le point



m', il suffit de tracer cm' que coupe ao' en h, de prendre à partir du point o sur oo' les longueurs $on = op = m'h$ et de joindre mn et mp, qui sont les tangentes au point double. Le problème de la construction des tangentes au point double de la section du tore par son plan tan-

gent a déjà été traité dans les *Nouvelles Annales*, par M. Doucet, qui a donné une construction un peu plus compliquée que la précédente (*Nouvelles Annales*, septembre 1884).

Nous avons supposé pour la construction que la section se composait de deux ellipses. Si elle se composait de deux hyperboles, la construction serait la suivante :

Sur ab comme diamètre, décrire un cercle; projeter en k sur ab le point de contact f de la tangente menée de o' à ce cercle; prendre sur oo' à partir du point o les longueurs $on = op = o'k$ et joindre mn et mp.

SUR LES MINIMA DE SOMMES DE TERMES POSITIFS DONT LE PRODUIT EST CONSTANT;

PAR M. CH. BIOCHE,
Professeur au lycée de Douai.

Le théorème sur le maximum d'un produit de facteurs positifs dont la somme est constante a une réciproque relative au minimum de la somme des termes positifs dont le produit est constant. Pour démontrer cette réciproque il y a, je crois, avantage à se servir de la remarque suivante.

Le théorème sur le maximum d'un produit de n facteurs positifs $x, y, z, \ldots$, lorsque

$$x + y + z \ldots = a,$$

se traduit par l'inégalité

$$xyz \ldots \le \left(\frac{a}{n}\right)^n,$$

qu'on peut écrire

$$xyz\ldots \leqq \left(\frac{x+y+z+\ldots}{n}\right)^n,$$

l'inégalité se transformant en égalité si $x=y=z\ldots$.

Cette inégalité exprime à la fois :

1° Que, si la somme est donnée, le produit a un maximum ;

2° Que, si le produit est donné, la somme a un minimum dans le cas de l'égalité des facteurs.

On a de même

$$x^m y^n z^p \leqq \left(\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)^{m+n+p} \times m^m \times n^n \times p^p,$$

qui donne le minimum de $x+y+z$ si $x^m y^n z^p$ est constant, ce minimum ayant lieu lorsque

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}.$$

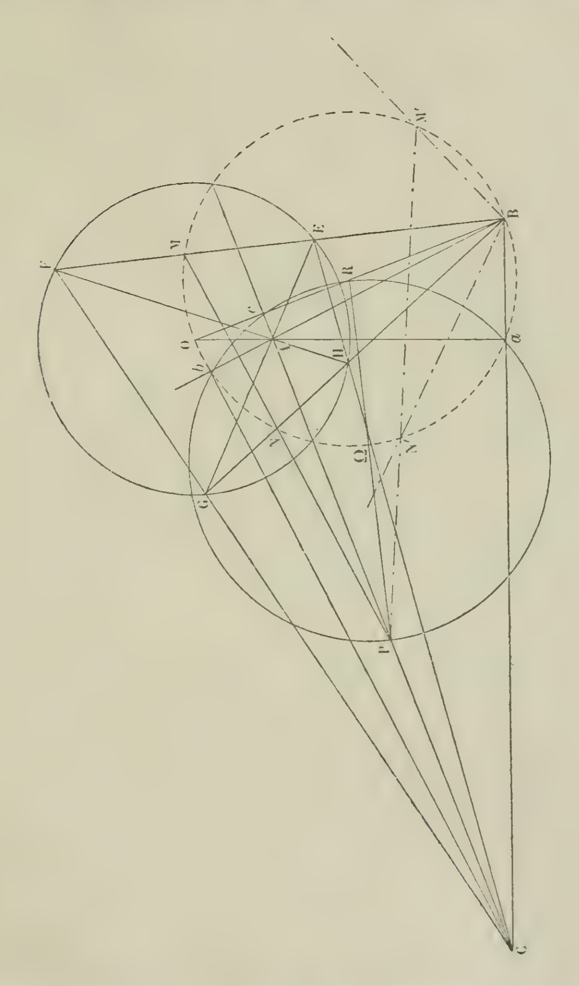
NOTE SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CERCLE DES NEUF POINTS;

Par M. F. FARJON.

Soit ABC un triangle obtusangle en A ; on peut considérer les trois points A, B, C comme les points d'intersection des diagonales et des côtés opposés d'une infinité de quadrilatères inscrits dans un cercle Σ ayant son centre au point de concours O des hauteurs et un rayon ρ tel que $\rho^2=\mu\alpha$, μ et α étant les deux segments que détermine le point O sur l'une quelconque des hauteurs.

De ces quadrilatères, les uns sont réels, les autres imaginaires, mais certains éléments de ceux-ci sont tou-

jours réels. Considérons une sécante BEF menée par le point B, elle détermine un quadrilatère EFGH inscrit



dans Σ. Décrivons sur OB comme diamètre un cercle, ce cercle passe par les milieux M et N des côtés opposés EF et GH; la droite MN, en vertu d'un théorème connu,

passe par le milieu P de AC : le milieu de MN est le centre de gravité des quadrilatères.

Lorsque la sécante issue du point B cesse de couper Σ, le quadrilatère est imaginaire; le point M′ où elle rencontre le cercle OB est le milieu réel du côté correspondant. Si l'on joint M′P, on rencontre le cercle OB en un second point N′, milieu réel du côté opposé, et le centre de gravité est le milieu de M′N′.

Tous les quadrilatères considérés, réels ou imaginaires, ont donc leurs centres de gravité réels. *Le lieu de ces centres de gravité est le cercle* Ω *des neuf points du triangle* ABC.

Soient a, b, c les pieds des trois hauteurs. L'arc bca du cercle Σ comprend les centres de gravité de tous les quadrilatères engendrés par une sécante tournant autour du point B, l'arc abc ceux des quadrilatères engendrés par une sécante tournant autour du point C, l'arc bc, ceux des quadrilatères (tous réels) engendrés par une sécante tournant autour du point A. L'arc bc, commun aux deux précédents, est le seul qui corresponde à des quadrilatères réels.

Si le triangle ABC est acutangle, le cercle Σ est imaginaire, tous les quadrilatères définis ci-dessus sont imaginaires, mais la construction du centre de gravité s'applique de la même manière et donne toujours un point réel *dont le lieu est le cercle des neuf points*. On peut, dans ce dernier cas, donner une interprétation du cercle Σ en appliquant le procédé indiqué par Chasles (*Géométrie supérieure*, 790-795). Au point O de concours des hauteurs, élevons une perpendiculaire OS au plan égale à $\sqrt{-\mu\alpha}$, quantité qui, dans l'hypothèse, est réelle. Le point S est le sommet d'un trièdre trirectangle dont les arêtes passent par les sommets A, B, C. Ce trièdre est assez intéressant à

étudier et permet de trouver certaines propriétés des triangles.

Je n'en citerai qu'un exemple :

Le théorème de Stewart est ainsi conçu : Le carré de la droite qui joint les points de concours des côtés opposés d'un quadrilatère inscrit au cercle est égal à la somme des carrés des tangentes menées de ces deux points de concours à la circonférence du cercle. Dans le triangle obtusangle ABC, le théorème de Stewart ne concerne que le côté BC. Mais, si l'on considère que le carré de la tangente imaginaire menée au cercle par un point intérieur est égal au produit négatif des deux segments d'une des sécantes menées par ce point, on démontrera sans difficulté que le théorème s'applique tout aussi bien à chacun des côtés AB et AC.

Si le triangle est acutangle, Σ devient imaginaire: on sait qu'alors le théorème du produit constant des deux segments des sécantes issues d'un même point, produit toujours positif, cette fois, subsiste (Chasles, *Géométrie supérieure*, 790). En considérant ce produit comme égal au carré de la tangente, on reconnaît sans peine que le carré d'un côté du triangle est égal à la somme des carrés des tangentes menées au cercle Σ par ses deux extrémités.

Le théorème de Stewart peut donc être mis sous cette forme beaucoup plus générale : *Dans un triangle quelconque, le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux tangentes menées de ses extrémités au cercle* Σ.

Revenons au trièdre trirectangle S, pour le cas du triangle acutangle, et nous allons voir tous nos éléments imaginaires disparaître et faire place à des éléments réels.

En effet, dans ce cas, le carré de la tangente menée

du sommet A à Σ

$$t^2 = \overline{AO}^2 - \rho^2;$$

mais

$$\rho^2 = -\overline{SO}^2.$$

donc

$$t = SA;$$

de même la tangente menée du sommet B

$$t' = SB$$

et, dans le triangle SAB, on a

$$\overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 = \overline{AB}^2.$$

CONIQUES POLAIRES D'UN POINT ET D'UNE DROITE;

PAR M. E. FONTANEAU.

Soient

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une conique C et X, Y les coordonnées d'un point fixe P. La détermination des tangentes menées du point à la courbe résulte, comme on le sait, de l'équation

$$(2) \qquad (Y - y)\frac{df}{dy} + (X - x)\frac{df}{dx} = 0$$

combinée avec l'équation (1).

Il est d'usage d'en déduire pour la polaire du point P cette équation

$$(3) \qquad X\frac{df}{dx} + Y\frac{df}{dy} + Z\frac{df}{dz} = 0:$$

mais on néglige d'indiquer à quelle courbe correspond

l'équation (2) quand on y considère x, y comme les coordonnées courantes sans employer les coordonnées homogènes.

Or on voit immédiatement que cette courbe du second ordre résulte de l'intersection des rayons homologues des deux faisceaux définis par les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y - Y - m(x - X) = 0, \\ \dfrac{df}{dx} + m \dfrac{df}{dx} = 0. \end{array} \right.$$

Dans le système des coordonnées cartésiennes, on obtient, par ce mode de génération, le lieu des milieux des cordes interceptées par la conique C sur les sécantes menées du point P.

Si l'on interprète les mêmes équations dans le système plus général des coordonnées ponctuelles de Chasles (*Géométrie supérieure*, Chap. XXIII), la courbe en question S résulte du tracé suivant :

Étant donnée dans le plan de la conique C, outre le point P, une droite quelconque D, si par le point P on mène une transversale qui rencontre la conique C aux points a et b et la droite D au point n, puis qu'on détermine le conjugué harmonique m du point n par rapport aux points a et b, la courbe S sera le lieu des points m lorsque la transversale se déplace en tournant autour du point P. De là résultent les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Deux droites déterminent par leurs pôles pris par rapport à une conique et par leurs points d'intersection avec elle les sommets d'un hexagone inscriptible à une courbe du second ordre.*

Si les deux droites se coupent sur la conique, il en résulte cette proposition :

Théorème II. — *Lorsqu'un triangle est inscrit dans*

une conique, toute transversale menée par le pôle de l'un des côtés est divisée harmoniquement par les deux autres côtés du triangle et par la conique.

Si l'une des droites passe par le pôle de l'autre :

Théorème III. — *La polaire d'un point quelconque d'une droite donnée passe par le pôle de cette droite.*

Théorème IV. — *Toute sécante menée par un point est divisée harmoniquement par le point, sa polaire et la conique.*

Du principe de dualité, ou de l'interprétation des équations (2) et (4) dans le système de coordonnées tangentielles de Chasles (*Géométrie supérieure,* Chap. XXIV), on déduit les propositions suivantes :

Théorème V. — *Deux droites quelconques déterminent, par elles-mêmes et par les tangentes aux points où elles coupent une conique, les côtés d'un hexagone circonscriptible à une courbe du second ordre.*

Théorème VI. — *Lorsqu'un triangle est circonscrit à une conique, tout point pris sur la polaire d'un des sommets est le centre d'un faisceau harmonique que l'on obtient en joignant ce point aux deux autres sommets du triangle et menant les deux tangentes à la conique.*

Théorème VII. — *Le pôle d'une droite qui passe par un point est sur la polaire de ce point.*

Théorème VIII. — *Tout point pris sur une droite est le centre d'un faisceau harmonique composé de la droite donnée, de celle qui unit le point donné au pôle de la droite et des deux tangentes à la conique menées par le point donné.*

Cette méthode s'étend aux surfaces du second ordre

et pourrait donner lieu à d'autres conséquences sur lesquelles je n'insiste pas pour ne pas allonger cette Note au delà de son importance.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1887;

Par UN ABONNÉ.

Soit P le point du cylindroïde dont les coordonnées sont α, β, γ. Les équations de la normale en ce point sont

$$\frac{x-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z-\gamma}{\alpha^2+\beta^2},$$

et, comme cette normale passe par le point $M(x', y', z')$, on a

$$(1) \qquad \frac{x'-\alpha}{\alpha\gamma-m\alpha}=\frac{y'-\beta}{\beta\gamma+m\beta}=\frac{z'-\gamma}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Ces relations, dans lesquelles on peut supposer α, β, γ coordonnées courantes, représente une courbe passant par les pieds des normales menées du point M à la surface donnée.

On a, en outre, en remarquant que le point P est sur la surface,

$$(2) \qquad \gamma(\alpha^2+\beta^2)-m(\alpha^2-\beta^2)=0.$$

Les pieds des normales demandées s'obtiendraient donc en résolvant les équation (1) et (2) par rapport à α, β, γ. Mais ces équations, vu leur forme compliquée, ne peuvent être résolues par les procédés élémentaires de l'Algèbre.

Nous allons alors nous proposer de former : 1° l'équation qui a pour racines les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$; 2° l'équation qui a pour racines les valeurs de γ.

Équation en $\frac{\beta}{\alpha}$. — 1° Les relations (1) donnent, en considérant les deux premiers rapports,

$$\beta\gamma x' - \alpha\beta\gamma + m\beta x' - m\alpha\beta = \alpha\gamma y' - m\alpha y' - \alpha\beta\gamma + m\alpha\beta$$

ou

$$2m\alpha\beta - m(\alpha y' + \beta x') + \gamma(\alpha y' - \beta x') = 0.$$

Divisant tous les termes par α et posant $\frac{\beta}{\alpha} = \mu$, il vient

$$2m\mu\alpha - m(y' + \mu x') + \gamma(y' - \mu x') = 0.$$

D'autre part, la relation (2) donne

$$\gamma(1 + \mu^2) = m(1 - \mu^2)$$

ou

$$\gamma = m\left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\right).$$

Remplaçant γ par sa valeur dans l'égalité précédente et divisant tous les termes par m, il vient

$$2\mu\alpha - (y' + \mu x') + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}\right)(y' - \mu x') = 0;$$

d'où

$$\alpha = \frac{(1 + \mu^2)(y' + \mu x') - (1 - \mu^2)(y' - \mu x')}{2\mu(1 + \mu^2)}$$

ou, en simplifiant,

$$\alpha = \frac{x' + \mu y'}{1 + \mu^2}.$$

Considérons maintenant le premier et le troisième rapport des relations (1); ils donnent

$$(x' - \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = (z' - \gamma)(\alpha\gamma - m\alpha),$$

ou, en divisant tous les termes par α^2 et remplaçant $\frac{\beta}{\alpha}$

par μ,

$$(x'-\alpha)(1+\mu^2)=(z'-\gamma)\,\frac{\gamma-m}{\alpha}.$$

Si, dans cette égalité, nous remplaçons les quantités α et γ par leurs valeurs trouvées tout à l'heure, nous aurons une équation qui ne contiendra plus que μ comme inconnue et qui ne sera autre chose que l'équation demandée. On obtient ainsi

$$(1+\mu^2)(x'+\mu y')(\mu x'-y')+2m\mu[z'-m+\mu^2(z'+m)]=0$$

ou, en effectuant les calculs et ordonnant par rapport à μ,

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned}&\mu^4 x'y'+\mu^3[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]\\&\quad+\mu[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]-x'y'=0.\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation du quatrième degré qui donne les valeurs du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$.

Équation en γ. — Pour avoir l'équation en γ, il n'y a qu'à remplacer dans l'équation précédente la quantité μ par sa valeur en fonction de γ.

Or, de la relation $\gamma=m\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)$, on tire

$$\mu=\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}};$$

on a donc, en remplaçant μ par sa valeur dans l'équation (I),

$$\begin{aligned}\left(\frac{m-\gamma}{m+\gamma}\right)^2 x'y'+\frac{m-\gamma}{m+\gamma}\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\,[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]&\\+\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\,[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]-x'y'&=0.\end{aligned}$$

Faisant passer les termes rationnels dans le second membre et les termes irrationnels dans le premier, il

vient

$$(m^2-\gamma^2)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]$$
$$+(m+\gamma)^2\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\,[x'^2-y'^2+2(z'-m)]=4m\gamma x'y'$$

ou, en mettant $(m+\gamma)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}$ en facteur dans le premier membre,

$$(m+\gamma)\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}}\Big\{(m-\gamma)[x'^2-y'^2+2m(z'+m)]$$
$$+(m+\gamma)[x'^2-y'^2+2m(z'-m)]\Big\}=4m\gamma x'y',$$

ou encore, en effectuant entre crochets et divisant par $2m$,

$$\sqrt{m^2-\gamma^2}[x'^2-y'^2+2m(z'-y)]=2\gamma x'y',$$

ou enfin, en élevant au carré et ordonnant par rapport à γ,

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{array}{l} 4m^2\gamma^4-4m(x'^2-y'^2+2mz')\gamma^3 \\ \quad+[(x'^2-y'^2+2mz')^2+4x'^2y'^2-4m^4]\gamma^2 \\ \quad+4m^3(x'^2-y'^2+2mz')\gamma-m^2(x'^2-y'^2+2mz')^2=0. \end{array}\right.$$

C'est la seconde équation demandée.

Si l'on savait résoudre les équations (I) et (II), on déduirait facilement des racines de ces équations les valeurs des coordonnées α, β, γ. En effet, si l'on connaissait μ, par exemple, les coordonnées α, β, γ seraient données par les formules

$$\alpha=\frac{x'+\mu y'}{1+\mu^2},\qquad \beta=\frac{\mu(x'+\mu y')}{1+\mu^2},\qquad \gamma=m\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right).$$

De même, si l'on connaissait γ, on aurait μ par la formule

$$\mu=\sqrt{\frac{m-\gamma}{m+\gamma}},$$

et l'on en déduirait α et β.

2° Pour que l'équation (I) soit réciproque, il faut que les coefficients de deux termes quelconques situés à égale distance des extrêmes soient égaux et de signes contraires, c'est-à-dire que l'on ait

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' + m) + x'^2 - y'^2 + 2m(z' - m) = 0$$

ou

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = 0,$$

équation qui exprime que le point M doit se trouver sur un *paraboloïde hyperbolique* ayant pour plans principaux le plan des xz et le plan des yz.

Supposons cette condition remplie et cherchons les coordonnées des pieds des normales menées du point M au cylindroïde. L'équation (I) prend la forme

$$\mu^4 x'y' + 2m^2\mu^3 - 2m^2\mu - x'y' = 0,$$

ou, en groupant les termes et mettant $(\mu^2 - 1)$ en facteur commun,

$$(\mu^2 - 1)(\mu^2 x'y' + 2m^2\mu + x'y') = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\mu^2 - 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu^2 x'y' + 2m^2\mu + x'y' = 0.$$

La première équation donne

$$\mu' = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu'' = -1,$$

et la seconde

$$\mu''' = \frac{-m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{x'y'}$$

et

$$\mu^{\text{IV}} = \frac{-m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{x'y'}.$$

Connaissant les valeurs de μ, on trouve facilement

celles de α, β, γ, qui sont

$$\alpha' = \frac{x'+y'}{2}, \qquad \beta' = \frac{x'+y'}{2}, \qquad \gamma' = 0,$$

$$\alpha'' = \frac{x'-y'}{2}, \qquad \beta'' = -\frac{x'-y'}{2}, \qquad \gamma'' = 0,$$

$$\alpha''' = \frac{x'y'^2\left(x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2\left(m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)},$$

$$\beta''' = -\frac{y'\left(x'^2 - m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2},$$

$$\gamma''' = \frac{\sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{m},$$

$$\alpha^{\text{IV}} = \frac{x'y'^2\left(x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2\left(m^2 + \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)},$$

$$\beta^{\text{IV}} = -\frac{y'\left(x'^2 - m^2 - \sqrt{m^4 - x'^2y'^2}\right)}{2m^2},$$

$$\gamma^{\text{IV}} = -\frac{\sqrt{m^4 - x'^2y'^2}}{m}.$$

3° Supposons que l'équation (II) ait une racine double égale à z'. Les relations entre les coefficients et les racines sont alors

$$\gamma' + \gamma'' + 2z' = \frac{x'^2 - y'^2 + 2mz'}{m},$$

$$\gamma'\gamma'' + (\gamma' + \gamma'')z' + z'^2 = \frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 + 4x'^2y'^2 - 4m^4}{4m^2},$$

$$2\gamma'\gamma''z' + (\gamma' + \gamma'')z'^2 = -m(x'^2 - y'^2 + 2mz'),$$

$$\gamma'\gamma''z'^2 = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{4}.$$

De la première et de la quatrième, on tire

$$\gamma' + \gamma'' = \frac{x'^2 - y'^2}{m},$$

$$\gamma'\gamma'' = -\frac{(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2}{4z'^2},$$

et, en portant ces valeurs dans la troisième, on a

$$\frac{(x'^2-y'^2)z'^2}{m}-\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{2z'}=-m(x'^2-y'^2+2mz'),$$

ou, en chassant les dénominateurs et simplifiant,

$$2(x'^2-y'^2)z'^3-m(x'^2-y'^2+2mz')(x'^2-y'^2)=0,$$

équation qui se décompose en

$$x'^2-y'^2=0 \qquad \text{et} \qquad 2z'^3-m(x'^2-y'^2+2mz')=0.$$

La première équation représente les plans bissecteurs des angles dièdres $xozy$ et $xozy'$, et la seconde une surface du troisième degré rencontrant chacun des plans $z=0$, $z=m$ et $z=-m$ suivant deux droites situées dans les plans bissecteurs dont nous venons de parler.

Supposons le point M situé sur l'une des deux surfaces précédentes. L'équation (II) admet alors la racine double z' et les deux autres racines satisfont aux relations

$$\gamma'+\gamma''=\frac{x'^2-y'^2}{m} \qquad \text{et} \qquad \gamma'\gamma''=-\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{4z'^2}.$$

Pour que ces racines soient réelles, il faut que l'on ait

$$\frac{(x'^2-y'^2)^2}{m^2}+\frac{(x'^2-y'^2+2mz')^2}{z'^2}>0,$$

condition qui est toujours satisfaite, puisque le premier membre est une somme de deux carrés.

4° Pour savoir ce que représente l'équation (II) quand on y regarde γ comme une constante et x', y', z' comme les coordonnées d'un point variable, nous n'avons qu'à ordonner cette équation par rapport à

$$(x'^2-y'^2+2mz')$$

et à résoudre l'équation du second degré obtenue. On a ainsi

$$(\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz')^2 - 4m\gamma(\gamma^2 - m^2)(x'^2 - y'^2 + 2mz') + 4m^2\gamma^2(\gamma^2 - m^2) + 4\gamma^2 x'^2 y'^2 = 0;$$

d'où

$$x'^2 - y'^2 + 2mz' = \frac{2m\gamma(\gamma^2 - m^2) \pm 2\gamma x'y'\sqrt{\gamma^2 - m^2}}{\gamma^2 - m^2},$$

ou, en séparant les racines et simplifiant,

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) + \frac{2\gamma x'y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

$$x'^2 - y'^2 + 2m(z' - \gamma) - \frac{2\gamma x'y'}{\sqrt{\gamma^2 - m^2}} = 0,$$

équations qui représentent deux *paraboloïdes hyperboliques*.

La même question a été résolue, d'une manière analogue, par M. Clapier, étudiant à la Faculté des Sciences de Montpellier, et par M. Barisien.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Brisse par un Abonné.

Permettez-moi de vous signaler une erreur qui s'est glissée dans la rédaction d'un article dû à M. J. Collin, « Sur le théorème de Rolle », paru dans les *Nouvelles Annales* du mois de juin 1887.

La deuxième partie du théorème II donné par M. Collin, à savoir « que pour $x = \pm\infty$ les polynômes $f(x, y)$ et f'_y soient de signes contraires l'un de l'autre », me paraît inexacte.

Si l'on applique, en effet, ce théorème à l'équation complète du troisième degré $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, on arrive à ce fait que cette équation ne peut avoir ses trois racines réelles si p est différent de 0; ce qui, énoncé sous une autre forme, mon-

trerait que l'équation du troisième degré ne peut jamais avoir ses trois racines réelles.

Cette seconde partie est d'ailleurs contredite par la troisième du même théorème. En effet, f'_x et f'_y sont généralement du même degré; les racines de f'_y devant être séparées par celles de f'_x, il en résulte qu'il y a une racine de f'_x qui est ou bien inférieure à la plus petite racine de f'_x, ou bien supérieure à la plus grande; par exemple, inférieure à la plus petite a'. Dès lors, pour $x = a' - \varepsilon$ et $x = -\infty$, f'_y n'aura pas le même signe; il en est de même de $f(x, y)$ si $f = 0$ a toutes ses racines réelles. Donc, puisque pour $x = a' - \varepsilon$, f'_y et $f(x, y)$ ont le même signe, ces polynômes auront encore le même signe pour $x = -\infty$. Ce qui montre la fausseté de la deuxième partie du théorème en question.

Si l'on veut appliquer ce théorème II, le plus simple, je crois, sera de vérifier s'il y a une racine de $f(x) = 0$ comprise entre $-\infty$ et la plus petite racine de f'_x, et une autre entre la plus grande de f'_x et $+\infty$.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Formation des principaux hydrométéores : *Brouillard, Bruine, Pluie, Givre, Neige, Grésil. — Nouvelle théorie de la Grêle;* par M. *Plumandon,* météorologiste adjoint à l'observatoire du Puy-de-Dôme. In-18. Paris, Gauthier-Villars, 1885. Prix : 1fr,25.

Sur les tourbillons, trombes, tempêtes et sphères tournantes. Études et expériences; par M. *C.-L. Weyher.* Grand in-8°, avec 40 figures dans le texte et 1 planche. Paris, Gauthier-Villars, 1887. Prix : 2fr,50.

La Genèse des éléments, Mémoire lu le 18 février 1887, à l'Institution royale, par M. *William Crookes.* Traduit, avec autorisation de l'auteur, par M. *Gustave Richard.* Prix : 1fr,50.

Cours de Géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École Centrale et à l'École Polytechnique, et des candidats aux Écoles des Ponts et Chaussées, des Mines, Forestière, Navale; par MM. *A. Imber* et *M. Weill*, professeurs de Mathématiques spéciales à l'École Turgot, au Collège Chaptal et à l'École Monge. Grand in-8° de 1000 pages, avec 439 figures dans le texte. Paris, G. Masson, 1888. Prix : 15fr.

TIRAGES A PART.

Sur les transformations birationnelles quadratiques; par M. Cl. Servais. Extrait de *Mathesis,* t. VII et VIII; 1887 et 1888.

Circolo matematico di Palermo. Statuto ed elenco dei Soci. Palerme; 1888.

Formules d'interpolation; Sur l'application de la méthode des moindres carres; par M. Carvallo. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CVI; 1888.

Sur les arcs des courbes planes algébriques; par M. G. Humbert. Extrait du *Journal de l'École Polytechnique,* LVIIe Cahier; 1887.

Sur quelques propriétés des surfaces coniques; Sur les lignes de courbure des cyclides; par M. G. Humbert. Extraits des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CV et CVI; 1887 et 1888.

Sur les courbes cycliques de direction; par M. G. Humbert. Extrait du *Journal de Jordan,* t. IV; 1888.

Théorème du carré de l'hypoténuse; par M. A. Marre. Extrait du *Bullettino de Boncompagni,* t. XX; 1887.

ERRATA.

Page 105, ligne 2, *au lieu de* forment une involution, *lisez* déterminent une involution à rayons doubles rectangulaires.

Même page, dernier alinéa, *au lieu de* forment un faisceau en involution, *lisez* déterminent un faisceau en involution à rayons doubles rectangulaires.

AVIS.

MM. les Auteurs qui ont des Articles contenant des figures sont priés de faire, sur papier lisse, des épures exactes de leurs figures, à échelle aussi grande que possible, de telle sorte qu'on puisse les reproduire par la photogravure.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888.

On donne un quadrilatère plan OACB *et deux séries de paraboles : les unes tangentes en* A *à* AC *et ayant pour diamètre* OA, *les autres tangentes en* B *à* BC *et ayant pour diamètre* OB. *On demande :*

1° *Le lieu du point de contact* M *d'une parabole de la première série avec une de la seconde série ;*

2° *Indiquer, en laissant le triangle* OAB *invariable, dans quelle région du plan doit être placé le point* C *pour que le lieu soit une ellipse ou pour qu'il soit une hyperbole ;*

3° *Démontrer, dans l'hypothèse où* OACB *est un parallélogramme, que la tangente commune en* M *aux deux paraboles pivote autour du point de concours* K *des médianes du triangle* ABC ;

4° *Trouver, dans la même hypothèse, le lieu du point d'intersection* P *de la tangente en* M *aux deux paraboles avec l'autre tangente commune* ED *que l'on peut mener à ces deux courbes.*

Prenons OA pour axe des x et OB pour axe des y. Soient

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a'}-1=0, \qquad \frac{x}{b'}+\frac{y}{b}-1=0$$

les équations des droites AC et BC ; les coordonnées α et β du point C ont pour valeurs

$$\alpha=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a'}}{\frac{1}{ab}-\frac{1}{a'b'}}, \qquad \beta=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b'}}{\frac{1}{ab}-\frac{1}{a'b'}}.$$

1° Soient

$$(1) \qquad y^2 - 2\lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a'} - 1\right) = 0.$$

$$(2) \qquad x^2 - 2\mu\left(\frac{x}{b'} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0$$

les équations des deux séries de paraboles, λ et μ désignant des paramètres variables. Les coordonnées x et y d'un point M du lieu, substituées dans les équations (1) et (2), feront connaître les valeurs correspondantes de λ et de μ, et ces valeurs devront vérifier l'équation

$$(3) \qquad \frac{\lambda\mu}{ab} - \left(y - \frac{\lambda}{a'}\right)\left(x - \frac{\mu}{b'}\right) = 0,$$

obtenue en égalant les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes en ce point. En écrivant qu'il en est ainsi, on trouve qu'un point du lieu satisfait à l'une ou à l'autre des équations

$$xy = 0,$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right)xy + \frac{2y}{a'}\left(\frac{x}{b'} + \frac{y}{b} - 1\right) \\ &\qquad + \frac{2x}{b'}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a'} - 1\right) \\ &\qquad - 4\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a'} - 1\right)\left(\frac{x}{b'} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

ou

$$(4') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{ab'}x^2 + \left(\frac{3}{ab} + \frac{1}{a'b'}\right)xy + \frac{2}{a'b}y^2 \\ &\qquad - 2\left(\frac{1}{b'} + \frac{2}{a}\right)x - 2\left(\frac{1}{a'} + \frac{2}{b}\right)y + 4 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'axe des x correspond à l'hypothèse $\lambda = 0$, qui réduit la parabole (1) au double axe des x, et l'axe des y à l'hypothèse $\mu = 0$, qui réduit la parabole (2) au double axe des y. L'équation (4′) représente une courbe du second ordre. On voit immédiatement sur l'équation (4)

que cette courbe passe par les points de rencontre de la droite AC avec l'axe des x et avec la droite

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right)x + \frac{2}{a'}\left(\frac{x}{b'} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0;$$

ou, en remplaçant, dans cette équation, $\frac{y}{a'}$ par sa valeur tirée de l'équation de AC, avec la droite

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{a'b'}\right)x - 2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a'}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x - 2\alpha = 0.$$

On verrait de même que cette courbe passe par les points de rencontre de la droite BC avec l'axe des y et avec la droite

$$y - 2\beta = 0.$$

En faisant alternativement $y = 0$ et $x = 0$ dans l'équation (4), on trouve que cette courbe coupe l'axe des x en un second point dont l'abscisse est $2b'$ et l'axe des y en un second point dont l'ordonnée est $2a'$. On en connaît donc six points; elle est amplement déterminée.

2° Le genre de la conique (4) dépend du signe de l'expression

$$\delta = \frac{16}{aba'b'} - \left(\frac{3}{ab} + \frac{1}{a'b'}\right)^2,$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{a'}$ et $\frac{1}{b'}$ par leurs valeurs en α et β,

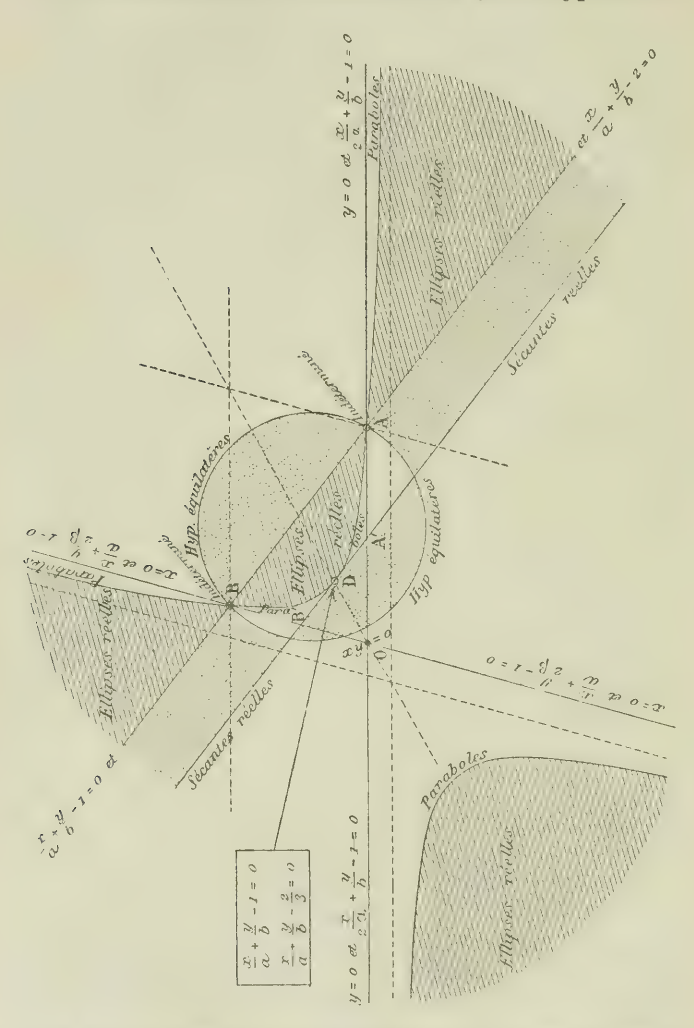
$$\delta = -\frac{(8\alpha\beta + b\alpha + a\beta - ab)(b\alpha + a\beta - ab)}{a^2b^2\alpha^2\beta^2}.$$

La droite AB et l'hyperbole

$$(5) \qquad 8\alpha\beta + b\alpha + a\beta - ab = 0$$

séparent donc le plan en régions, telles que, si le point C est pris sur celles qui sont couvertes de hachures, la

conique est du genre ellipse, si le point C est pris en dehors des hachures, la courbe est du genre hyperbole,



si le point C est pris sur la droite AB ou sur l'hyperbole (5), la courbe est du genre parabole.

L'espèce de la conique (4) dépend du signe de l'expression

$$\Delta = -2\left(\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'}\right) + \left(\frac{3}{ab} + \frac{1}{a'b'}\right),$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{a'}$ et $\frac{1}{b'}$ par leurs valeurs en α et β,

$$\Delta = \frac{(2b\alpha + 2a\beta - ab)(b\alpha + a\beta - ab)}{a^2b^2\alpha\beta}.$$

La droite A′B′, la droite AB et les deux axes Ox et Oy séparent donc les régions précédentes en portions telles que, eu égard au signe du coefficient de x^2,

$$\frac{2}{ab'} = \frac{2(b-\beta)}{ab\alpha},$$

toutes les régions hachurées correspondent à des ellipses réelles, et les autres à des hyperboles. Les points situés sur A′B′ donnent des sécantes réelles, à l'exception du point D qui donne les deux parallèles

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{2}{3} = 0.$$

Les points situés sur AB donnent deux parallèles indépendantes de la position qu'ils occupent,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0,$$

excepté les points A et B pour lesquels la conique (4) est indéterminée. Les points situés sur Ox donnent les deux droites

$$y = 0, \qquad \frac{x}{2\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0;$$

les points situés sur Oy donnent les deux droites

$$x = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{2\beta} - 1 = 0;$$

et enfin l'origine donne les deux axes.

Si l'on forme l'expression

$$\frac{\delta}{\Delta}\,\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} 2(8\alpha\beta + b\alpha + a\beta - ab) \\ \quad\times\left[\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 - a\alpha - b\beta - \dfrac{\cos\theta}{2}(b\alpha + a\beta - ab)\right]\end{array}\right\}}{ab\sin^2\theta.\alpha^2\beta^2(2b\alpha + 2a\beta - ab)},$$

et si l'on construit le cercle

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 - a\alpha - b\beta - \frac{\cos\theta}{2}(b\alpha + a\beta - ab) = 0,$$

qui passe par les points A et B et par les milieux des distances au point O des projections de chacun de ces points sur l'axe qui ne le contient pas, la région hyperbolique est partagée à son tour en portions telles que celles qui sont couvertes d'un semis correspondent à des hyperboles situées dans l'angle aigu de leurs asymptotes, et les portions blanches à des hyperboles situées dans l'angle obtus. Les points situés sur le cercle correspondent à des hyperboles équilatères, sauf ceux qui sont en même temps sur A'B' ou sur les axes, qui correspondent à des droites rectangulaires, et les points A et B déjà examinés.

3° Pour que le quadrilatère devienne un parallélogramme, il suffit de supposer a' et b' infinis. En désignant par x et y les coordonnées d'un point du lieu, l'équation (4), qu'elles vérifient, devient

$$\frac{3}{ab}xy - \frac{4}{a}x - \frac{4}{b}y + 4 = 0$$

ou

$$(3x - 4a)(3y - 4b) = 4ab.$$

de sorte qu'on peut exprimer les coordonnées du point M à l'aide d'un paramètre variable t par les deux équa-

tions

$$(6) \qquad 3y - 4b = 2at, \qquad 3x - 4a = \frac{2b}{t}.$$

En substituant ces valeurs de x et de y dans les équations (1) et (2), où $a' = b' = \infty$, on a

$$\lambda = \frac{2}{3} at(2b + at), \qquad \mu = \frac{2}{3} b \frac{b + 2at}{t^2},$$

de sorte que les équations des deux paraboles variables sont

$$(7) \qquad y^2 - \frac{4}{3} at(2b + at)\left(\frac{x}{a} - 1\right) = 0,$$

$$(8) \qquad x^2 - \frac{4}{3} b \frac{b + 2at}{t^2}\left(\frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

A l'aide de l'une ou de l'autre de ces équations, formons l'équation de la tangente au point M, dont les coordonnées sont données par les formules (6); on obtient

$$(9) \qquad y - \frac{2b}{3} = t\left(x - \frac{2a}{3}\right).$$

La tangente commune en M passe donc par le point indiqué, et, de plus, le paramètre t, choisi pour fixer les deux paraboles, se trouve être le coefficient angulaire de cette tangente commune.

4° Les coordonnées d'un point P de la tangente en M peuvent, d'après l'équation (9), s'exprimer à l'aide d'un paramètre variable θ, par les formules

$$(10) \qquad x - \frac{2a}{3} = \theta, \qquad y - \frac{2b}{3} = t\theta.$$

Une droite quelconque issue de ce point, m désignant son coefficient angulaire, aura pour équation

$$(11) \qquad y - \frac{2b}{3} - t\theta = m\left(x - \frac{2a}{3} - \theta\right).$$

Tirons de cette équation la valeur de x et portons-la dans l'équation (7), nous aurons une équation du second degré en y, et, en écrivant qu'elle a ses racines égales, nous aurons, pour déterminer les coefficients angulaires des tangentes issues du point P à la première parabole, l'équation

$$(a-3\theta)m^2+(2b+3t\theta)m-t(2b+at)=0,$$

qui doit admettre la racine t. En divisant le premier membre par $m-t$, on obtient, pour déterminer le coefficient angulaire de la seconde tangente, l'équation

$$(12)\qquad (a-3\theta)m+(2b+at)=0.$$

En tirant de l'équation (11) la valeur de y, en la portant dans l'équation (8) et en opérant comme précédemment, on a, pour déterminer les coefficients angulaires des tangentes issues du point P à la seconde parabole, l'équation

$$(b+2at)m^2-t^2(2a+3\theta)m-t^2(b-3t\theta)=0,$$

qui doit admettre la racine t. En divisant le premier membre par $m-t$, on obtient, pour déterminer le coefficient angulaire de la seconde tangente, l'équation

$$(13)\qquad (b+2at)m+t(b-3t\theta)=0.$$

Si l'on exprime que les équations (12) et (13) ont la même racine, on aura, pour déterminer θ, l'équation

$$t(b-3t\theta)(a-3\theta)-(b+2at)(2b+at)=0$$

ou

$$9t^2\theta^2-3(b+at)t\theta-2(b+at)^2=0,$$

qui fera connaître deux valeurs de θ correspondant : l'une au point M, l'autre au point P. Cette équation

résolue donne

$$\theta = \frac{2(b+at)}{3t}, \qquad \theta = -\frac{b+at}{3t}.$$

La première valeur, substituée dans les équations (10), donne les coordonnées (6) du point M; la seconde fait donc connaître les coordonnées du point P,

$$x = -\frac{b-at}{3t}, \qquad y = \frac{b-at}{3}.$$

En éliminant t entre ces deux dernières équations, on a l'équation du lieu décrit

$$3xy - bx - ay = 0.$$

C'est une hyperbole dont les asymptotes, parallèles aux axes, passent par le point de concours des médianes du triangle AOB; elle admet pour tangente à l'origine une parallèle à AB; elle est donc amplement déterminée.

En substituant la valeur trouvée pour θ dans l'une ou l'autre des équations (12) et (13), on obtient

$$m = -t\frac{2b+at}{b+2at},$$

et, en remplaçant m et θ par ces valeurs dans l'équation (11), on a l'équation de la tangente commune DE

$$3t(2b+at)x + 3(b+2at)y + (b-at)^2 = 0.$$

En l'ordonnant par rapport à t,

$$a(3x+a)t^2 + 2(3bx+3ay-ab)t + b(3y+b) = 0,$$

on voit qu'elle enveloppe la courbe

$$(3bx+3ay-ab)^2 - ab(3x+a)(3y+b) = 0$$

ou

$$b^2x^2 + abxy + a^2y^2 - ab^2x - a^2by = 0.$$

C'est une ellipse circonscrite au triangle AOB, ayant pour tangente à l'origine une parallèle à AB, et dont le centre est au point de concours des médianes du triangle AOB; elle est donc amplement déterminée.

Ch. B.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1888.

Un polynôme $f(x)$ de degré n vérifie l'identité

$$n f(x) = (x-a) f'(x) + b f''(x).$$

1° *Chercher les coefficients de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $(x-a)$;*

2° *Chercher les conditions de réalité des racines;*

3° *Prouver que, si b_0 est la valeur absolue de b, les racines de $f(x)$ sont comprises entre*

$$a - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}, \qquad a + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2} b_0}.$$

1° Le développement de $f(x)$, ordonné suivant les puissances de $x-a$, est

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a).$$

Les coefficients à chercher sont donc $f(a), f'(a), \ldots, f^n(a)$.

De l'identité

$$(1) \qquad n f(x) = (x-a) f'(x) + b f''(x).$$

on tire, par des dérivations successives, les identités

$$(2)\quad \begin{cases} (n-1)f'(x) = (x-a)f''(x) + b\,f'''(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (n-p+1)f^{p-1}(x) = (x-a)f^{p}(x) + b\,f^{p+1}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 2f^{n-2}(x) = (x-a)f^{n-1}(x) + b\,f^{n}(x), \\ f^{n-1}(x) = (x-a)f^{n}(x); \end{cases}$$

d'où, en remplaçant x par a,

$$\begin{aligned} n f(a) &= b\,f''(a), \\ (n-1)f'(a) &= b\,f'''(a), \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ (n-p+1)f^{p-1}(a) &= b\,f^{p+1}(a), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ 2f^{n-2}(a) &= b\,f^{n}(a), \\ f^{n-1}(a) &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$f^{n-1}(a) = f^{n-3}(a) = f^{n-5}(a) = \dots = 0.$$

$$f^{n-2}(a) = \frac{b}{2}f^{n}(a),$$

$$f^{n-4}(a) = \frac{b^2}{2.4}f^{n}(a),$$

$$f^{n-6}(a) = \frac{b^3}{2.4.6}f^{n}(a),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et

$$f(x) = f^{n}(a)\left[\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{b}{2}\,\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{b^2}{2.4}\,\frac{(x-a)^{n-4}}{(n-4)!} + \frac{b^3}{2.4.6}\,\frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!} + \dots\right].$$

2° Si b est positif et si n est pair, tous les termes de $f(x)$ sont de même signe, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, et l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires.

Si b est positif et si n est impair, il suffit de supprimer

le facteur $x - a$, commun à tous les termes de $f(x)$, pour être ramené au cas précédent. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc qu'une racine réelle a.

Si b est nul, l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles et égales à a.

Si b est négatif, les identités (1) et (2) montrent que la suite de Sturm, relative à $f(x)$, est complète et se compose des polynômes

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad \ldots,\quad f^n(x),$$

dont les premiers coefficients sont tous de même signe. L'équation $f(x) = 0$ a donc toutes ses racines réelles et distinctes.

3° Quand l'équation $f(x) = 0$ n'a qu'une racine réelle a, cette racine est évidemment comprise entre les nombres indiqués ; ces nombres se réduisent d'ailleurs à a quand l'équation a toutes ses racines égales à a ; il suffit donc d'examiner le cas où toutes les racines sont réelles et distinctes.

En groupant les termes deux par deux, à partir du premier, et en remplaçant b par $-b_0$, l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!}\left[\frac{(x-a^2)}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2}\right]\\ &\quad + \frac{b_0^2}{2.4}\,\frac{(x-a)^{n-6}}{(n-6)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-5)(n-4)} - \frac{b_0}{6}\right]\\ &\quad + \frac{b_0^4}{2.4.6.8}\,\frac{(x-a)^{n-10}}{(n-10)!}\left[\frac{(x-a)^2}{(n-9)(n-8)} - \frac{b_0}{10}\right] + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Le premier crochet sera positif si la fraction $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ est supérieure à $\frac{b_0}{2}$; mais alors tous les autres crochets le seront aussi, car le premier terme de chaque crochet est supérieur à $\frac{(x-a)^2}{(n-1)n}$ comme ayant un dénominateur plus petit, et le second terme est inférieur à $\frac{b_0}{2}$ comme

ayant un dénominateur plus grand. Les puissances de $(x-a)$ qui précèdent chaque crochet, et le terme qui reste seul, si les termes de $f(x)$ sont en nombre impair, sont de même parité. Toute valeur de x qui satisfait à l'inégalité

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} > 0$$

rend donc tous les termes de $f(x)$ de même signe, et, par suite, ne peut être racine; il en résulte que les racines de $f(x)$ sont comprises entre celles de l'équation

$$\frac{(x-a)^2}{(n-1)n} - \frac{b_0}{2} = 0,$$

c'est-à-dire entre les nombres indiqués. Ch. B.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1885;

Par M. Ernest MALO,
Capitaine du Génie à Besançon.

Par le centre d'une surface du second ordre, on mène deux demi-diamètres rectangulaires OM, ON : *on propose de démontrer que l'ensemble des droites* MN *qui passent par un point fixe* I *forme un cône du second ordre et de trouver sous quelles conditions ce cône sera de révolution. On propose, en second lieu, de démontrer que toutes les droites* MN *qui sont dans un même plan* Π *sont tangentes à une même section conique et de trouver comment doit être choisi ce plan pour que cette conique soit une parabole ou un cercle.*

Je m'appuierai sur ce théorème connu :

La somme des inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires OM, ON *est constante.*

Comme, dans un triangle rectangle, la somme des inverses des carrés des côtés est égale à l'inverse du carré de la hauteur relative à l'hypoténuse, la droite MN enveloppe un cercle ayant son centre en O et un rayon égal à $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Réciproquement, si, entre les inverses des carrés de deux rayons, OM, ON, rectangulaires ou dirigés suivant la même droite, on a la relation

$$\frac{1}{\rho^2} \pm \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{h^2},$$

et si M décrit une conique ayant O pour centre, il en sera de même de N, et les deux coniques auront mêmes directions d'axes.

Cela rappelé, considérons un plan passant par la droite OI : ce plan coupera la surface du second ordre suivant une section conique à laquelle correspondra un

Fig. 1.

cercle enveloppe des droites MN de ce plan; par conséquent, il y aura deux de ces droites qui passeront par I et qui seront également inclinées sur OI, et, d'après ce qui précède, en désignant par OG le diamètre dirigé suivant OI et par OH le diamètre perpendiculaire, la relation

$$\frac{1}{\overline{OI}^2} + \frac{1}{\overline{OK}^2} = \frac{1}{\overline{OG}^2} + \frac{1}{\overline{OH}^2},$$

où OI et OG sont constants, oblige le point K à décrire une section conique ayant même centre et mêmes directions d'axes que la conique décrite par H lorsque le plan tourne autour de OI. Les droites MN menées par I sont donc sur un cône du second ordre, et, pour que ce cône soit de révolution, il faut que le rayon OP soit constant, c'est-à-dire que $\frac{1}{\overline{OG}^2} + \frac{1}{\overline{OH}^2}$ soit constant, et, comme OG est constant, que OH soit aussi constant. En d'autres termes, il faut que le point I ait été choisi sur l'axe de l'un des systèmes de plans de sections circulaires.

Si, au lieu de considérer les droites MN qui passent par un point, on considère celles qui sont dans un plan, il est clair qu'elles enveloppent une section conique, car, considérant un point I dans ce plan, on peut de ce point mener deux tangentes et deux seulement à l'enveloppe, puisque, d'après ce qui précède, le point I est le sommet d'un cône du second ordre qui sera coupé par le plan suivant deux génératrices et seulement deux. Je suppose maintenant que I soit sur la droite à l'infini

Fig. 2.

du plan. Le cône dégénère en un cylindre et la section droite de ce cylindre s'obtiendra en menant d'abord les trois diamètres rectangulaires : OG, dirigé suivant

OI; OE, perpendiculaire à OI et parallèle au plan donné; OH, perpendiculaire à ce plan ; puis les droites EG et HG, enfin les perpendiculaires OP et OQ que l'on rabattra en OP_1, OQ_1 suivant OE et OH; P_1 et Q_1 seront deux points de la section droite cherchée dont on connaît déjà le centre et les directions axiales, qui sont les mêmes que celles de la section EOH, de sorte qu'elle est complètement déterminée. La trace du plan sur le plan EOH est une droite MM′ parallèle à OE, et, si l'enveloppe des droites MN est une parabole, un des points d'intersection M, M′ de la droite MM′ avec la section droite du cylindre OI est à l'infini, puisque l'on ne peut mener à une parabole qu'une tangente parallèle à une direction donnée. OE est donc une asymptote de la section droite du cylindre, c'est-à-dire que le segment OQ_1 est infini : cela exige que les segments OE et OG soient de même infinis, c'est-à-dire que le plan GOE coupe le cône asymptote de la surface suivant deux génératrices rectangulaires. On a donc l'énoncé suivant :

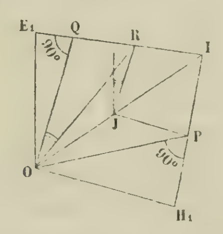
Les cordes d'une surface du second ordre, vues du centre sous un angle droit et situées dans un même plan, enveloppent une parabole lorsque la conique d'intersection du plan et de la surface est une hyperbole équilatère.

Je cherche maintenant à quelles conditions l'enveloppe des cordes MN situées dans un même plan Π sera un cercle. Une condition suffisante est évidemment, comme on l'a remarqué de prime abord, que le plan passe par le centre ; mais cette condition n'est pas nécessaire. Les tangentes menées d'un point I du plan à l'enveloppe des cordes MN de ce plan sont, comme on l'a observé, les génératrices suivant lesquelles le cône des droites MN qui passent par I est coupé par le plan Π,

et ces génératrices forment une conique évanouissante semblable à la conique de dimensions finies suivant laquelle le cône I est coupé par un plan parallèle à II. Si donc celle-ci est un cercle, l'autre sera un point-cercle doublement tangent à l'enveloppe des cordes MN du plan II, c'est-à-dire un des quatre foyers de cette enveloppe, qui sera un cercle si les foyers coïncident. Or il est facile de voir que, lorsque le point I se déplace sur une droite passant par l'origine OI, les directions des plans de sections circulaires du cône (I, MN) ne changent pas.

En effet, soient OG le diamètre passant par I, OH et OE les axes de la conique intersection de la surface avec le plan diamétral perpendiculaire à OI : le cône I coupera ce plan suivant une conique dont les axes OH_1,

Fig. 3.



OE_1 seront dirigés suivant OH et OE, comme on a vu, et s'obtiendront en décrivant les cercles de centre O et de rayons OP, OQ tangents à GH et à GE, puis en menant de I les tangentes à ces cercles. Les sections circulaires du cône I s'obtiendront ensuite en décrivant une sphère de centre O et de rayon OP; soit R un des points où cette sphère coupe IE_1 et soit J la projection de P sur OI; PJR est un plan de section circulaire et l'angle de JR avec OE_1 est manifestement égal à l'angle QOR. Le cosinus de cet angle étant mesuré par le rap-

port $\frac{OQ}{OP}$ qui est constant, la direction de JR est invariable, comme on l'avait annoncé. De là résulte la proposition suivante :

Si, du centre de la surface, on fait sur un plan quelconque la perspective des coniques, enveloppes des droites MN, *dans les plans parallèles au plan choisi, on obtient un système de coniques homofocales.*

En particulier, sur un plan de section circulaire les foyers réels du système seront le centre de la section et la projection du centre de la surface sur le plan. On voit aussi, et c'est ce qu'il importe surtout de remarquer, que si l'enveloppe des droites MN d'un plan Π est un cercle, il en sera de même pour tous les plans parallèles. Il suffit donc de trouver une seule position convenable pour Π. Or il est évident que, si l'on en a trouvé une, si un plan Π est situé convenablement par rapport à la surface donnée Σ, en construisant la figure à une échelle différente, on aura un plan Π' homologue de Π, qui sera également placé comme on le demande à l'égard de la surface Σ' homologue de Σ; mais tout plan Π parallèle à Π' est aussi convenablement situé par rapport à Σ' : on peut donc considérer, pour déterminer les conditions du problème, n'importe quelle surface homothétique à Σ, en particulier son cône asymptote. Mais, à l'égard de celui-ci, les plans qui le coupent suivant des génératrices rectangulaires enveloppent un cône du second ordre Γ dont il s'agit seulement de trouver les plans de sections circulaires, et c'est à quoi l'on parviendra sans difficulté de la même façon que ci-dessus.

En écrivant l'équation de la surface donnée sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

les équations des plans centraux appartenant aux systèmes cherchés seront

$$(A^2 - B^2)x^2 + (C^2 - B^2)z^2 = 0,$$
$$(B^2 - A^2)y^2 + (C^2 - A^2)z^2 = 0,$$
$$(A^2 - C^2)x^2 + (B^2 - C^2)z^2 = 0.$$

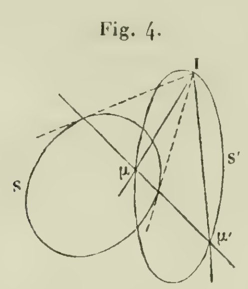
Si, comme on le suppose ordinairement, A, B, C sont rangés par ordre de grandeur croissante, les deux derniers systèmes sont imaginaires.

On peut aussi, pour déterminer les systèmes de plans Π, se servir de la méthode suivante, qui m'a été indiquée par M. le lieutenant-colonel du Génie Percin.

Deux points M et N, vus de l'origine sous un angle droit, sont conjugués par rapport à la sphère évanouissante ayant pour centre l'origine, et si la droite MN doit rester dans un plan Π, ces points M et N seront, en particulier, conjugués par rapport au cercle imaginaire suivant lequel ce plan Π coupe la sphère, cercle qui a pour centre la projection O_1 de O sur le plan Π et pour rayon $\overline{OO_1}\sqrt{-1}$. Ainsi, le problème de trouver l'enveloppe des droites MN vues du centre sous un angle droit et situées dans un plan Π est un cas particulier de celui où l'on se propose de trouver l'enveloppe des droites divisées harmoniquement par deux coniques S et S'. Cette enveloppe est une conique, comme on le sait d'ailleurs; mais les considérations suivantes l'établissent également. En effet, soit à trouver les droites MN qui passent par un point I de la conique S' : il suffit évidemment de prendre les points μ et μ' où la polaire de I par rapport à la conique S rencontre la conique S' et de les joindre au point I. Si μ et μ' coïncident, I est un point de l'enveloppe cherchée, et, comme la droite $\mu\mu'$ enveloppe une conique, polaire réciproque de S' par

rapport à S, cela aura lieu quatre fois, puisque deux coniques admettent quatre tangentes communes. De tout cela résulte que l'enveloppe des droites MN ne peut être qu'une conique. Pour que cette conique soit un cercle, il faut, à supposer que S' soit un cercle aussi,

Fig. 4.



que deux de leurs points d'intersection soient les points circulaires à l'infini : ainsi, dans cette hypothèse, les polaires des points circulaires, prises par rapport à la conique S, touchent le cercle donné S'. Or ces polaires sont connues : ce sont les droites qui joignent le centre de S aux points de contact des tangentes issues des points circulaires, c'est-à-dire aux deux points situés sur la directrice de part et d'autre du grand axe à la distance $\pm \frac{\beta^2\sqrt{-1}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, α et β désignant les demi-longueurs d'axes de la conique S. Puisque le cercle S' leur est tangent, son centre est sur l'axe : on voit donc d'abord que les plans Π cherchés sont parallèles à un axe principal de la surface donnée. En considérant ensuite la condition de distance, on trouve aisément que les plans Π doivent faire, avec la direction du diamètre conjugué, un angle ω défini par la relation

$$\operatorname{tang}\omega = -\frac{b^2}{\sqrt{a^4-b^4}},$$

a et b étant les axes de la section faite dans la surface par celui des plans Π qui passe par le centre. On trouve alors pour les équations des trois systèmes centraux

$$\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{b^4}\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4}\right) y^2 + \left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{a^4}\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}\right) y^2 = 0,$$

comme précédemment.

La méthode qui vient d'être exposée est surtout commode pour étudier les généralisations qu'on peut tenter de donner du problème; par exemple, pour étudier la surface décrite par les droites MN qui s'appuient sur deux droites M'N', M''N'', vues elles-mêmes du centre sous un angle droit, et les relations que cette surface, qui est du second ordre, a avec la surface donnée.

Note. — Nous avons reçu aussi, de M. Al. Aubry, élève du lycée de Lille, une excellente solution analytique.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1887;

Par M. Paul PAYET,
Élève du Collège Stanislas.

On considère toutes les coniques qui ont un foyer en un point donné F *et qui passent par deux points donnés* A *et* B :

1° *Montrer que ces coniques forment deux séries telles que pour toute conique d'une série la directrice*

correspondant au foyer F *passe par un point fixe de la droite* AB, *situé entre* A *et* B; *tandis que, pour toute conique de l'autre série, la directrice correspondant au foyer* F *passe par un point fixe de la droite* AB, *non situé entre* A *et* B.

2° *Trouver le lieu des centres de ces coniques et montrer qu'il se compose de deux coniques homofocales.*

3° *Prenant un point* C *sur le lieu précédent, reconnaître, d'après la position qu'il occupe sur ce lieu, si la conique considérée dont le point* C *est centre est telle que les points* A *et* B *soient sur une même branche ou sur deux branches différentes de cette conique.*

4° *Si le point* C *est tel que les points* A *et* B *sont sur une même branche de la conique considérée, reconnaître, d'après la position du point* C, *si cette conique est du genre ellipse ou du genre hyperbole, et, dans ce dernier cas, si les points* A *et* B *sont sur la branche voisine de* F *ou sur l'autre.*

1° Considérons le foyer F et les deux points A et B donnés; joignons FA et FB et menons les bissectrices des angles en F : l'une rencontre AB en M situé entre A et B, et l'autre en N situé en dehors de AB.

Or on sait que, si d'un point situé hors d'une conique on mène les tangentes à cette courbe, le point où la directrice correspondant à l'un des foyers rencontre la corde des contacts appartient à la bissectrice de l'angle sous lequel on voit du foyer la distance des points de contact, si ces points sont sur des branches différentes, et à la bissectrice de l'angle extérieur si ces points sont sur une même branche.

D'après cela, comme AB, FM et FN sont fixes, le

point M est un point fixe commun à toutes les directrices correspondant au foyer F des coniques pour lesquelles A et B sont sur des branches différentes, et le point N est un point fixe commun à toutes les directrices des coniques pour lesquelles A et B sont sur une même branche.

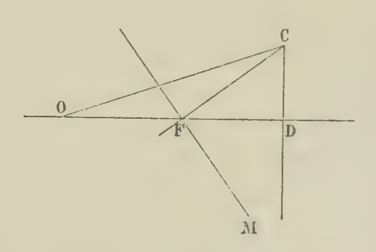
La première partie de l'énoncé se trouve ainsi démontrée.

2° Pour construire un centre quelconque et trouver le lieu de ce point, on pourrait appliquer le théorème déjà cité; mais on peut arriver plus simplement au résultat en s'appuyant sur la propriété suivante :

Dans une conique, le diamètre conjugué d'une direction de cordes et la perpendiculaire abaissée d'un foyer sur ces cordes concourent sur la directrice correspondant au foyer considéré (¹).

Considérons alors (*fig.* 1) une direction quelconque MH

(¹) En effet, soient FM une corde et FC la perpendiculaire menée par le foyer F. Ces deux droites étant rectangulaires et passant par le foyer, FC contient le pôle de FM. Ce pôle est aussi sur le diamètre

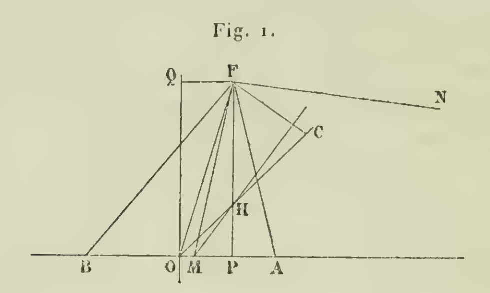


conjugué OC de FM; il est enfin sur la directrice CD, car FM passe par le foyer F.

Donc OC et FC concourent sur la directrice correspondant à F.

passant par M (A et B sont sur des branches différentes). Le centre se trouve d'abord sur l'axe FC mené par F perpendiculairement à la directrice, il se trouve ensuite sur le diamètre conjugué de AB, qu'on obtient en joignant, d'après la propriété citée, le milieu O de AB au point H où la directrice MH rencontre la perpendicu-

Fig. 1.



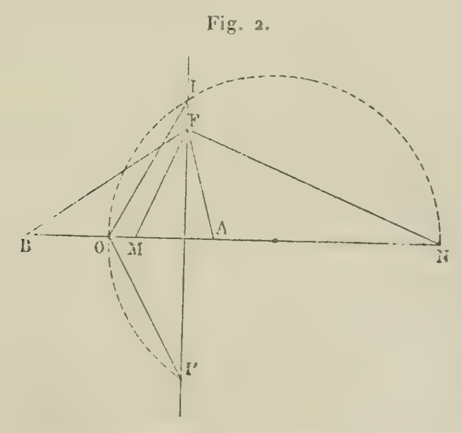
laire FP à AB. Le centre est donc le point C. Or ce point se trouve constamment sur les droites FC et OC qui pivotent autour des points fixes O et F. Ces droites forment deux faisceaux homographiques, car à toute droite de l'un des faisceaux correspond une et une seule droite de l'autre, et réciproquement.

Le lieu du centre des coniques dont la directrice passe en M est donc une conique passant en F et O. De plus, si nous plaçons MH suivant AB, le point C vient en P, et si MH devient perpendiculaire à AB, C se confond avec Q. La conique est donc circonscrite au rectangle OPFQ, et son centre est le centre D du rectangle. Si MH se place suivant MF, C vient en F, FC se place suivant FN, seconde bissectrice, et FC, coupant la conique en deux points confondus en F, est tangente en ce point; des raisons de symétrie nous donnent les tangentes en O, P et Q. Cette conique est une ellipse; car, pour qu'elle eût des points à l'infini, il faudrait que FC

et OC pussent devenir parallèles ou OC devenir perpendiculaire à MH. Or P, M et O étant les pieds de la hauteur, de la bissectrice intérieure et de la médiane issues de F, M, pied de la bissectrice, se trouve entre M et O. Par suite, H étant toujours à l'extérieur du cercle décrit sur MO comme diamètre, l'angle MHO n'est jamais droit, et la conique n'ayant pas de points à l'infini est une ellipse.

On prouverait d'une manière identique que le lieu du centre des coniques dont la directrice passe en N est une conique circonscrite au rectangle OPFQ, sa tangente en F est la première bissectrice FM; la symétrie nous donne les trois autres tangentes. Les deux coniques composant le lieu des centres sont donc circonscrites au même rectangle et orthogonales aux sommets de ce rectangle, car les bissectrices FM et FN sont rectangulaires. Par suite, d'après une propriété connue, les deux coniques sont homofocales, et, l'une étant une ellipse, l'autre sera une hyperbole.

Fig. 2.



Nous pouvons d'ailleurs trouver directement les asymptotes de cette hyperbole. En effet, dans ce cas, le

point P, pied de la hauteur, est forcément entre O et N : l'angle OHN sera donc droit lorsque H viendra aux point I et I′ où FP coupe le cercle décrit sur ON comme diamètre. Les directions asymptotiques sont alors OI et OI′, et, comme le centre est en D, nous avons les asymptotes en position.

3° D'après la génération même du lieu, nous voyons que l'ellipse est le lieu des centres des coniques pour lesquelles A et B sont sur des branches différentes, c'est donc un lieu de centres d'hyperboles.

L'hyperbole est au contraire le lieu des centres des coniques pour lesquelles A et B sont sur une même branche; il peut y avoir des centres d'ellipses ou d'hyperboles : nous allons les séparer.

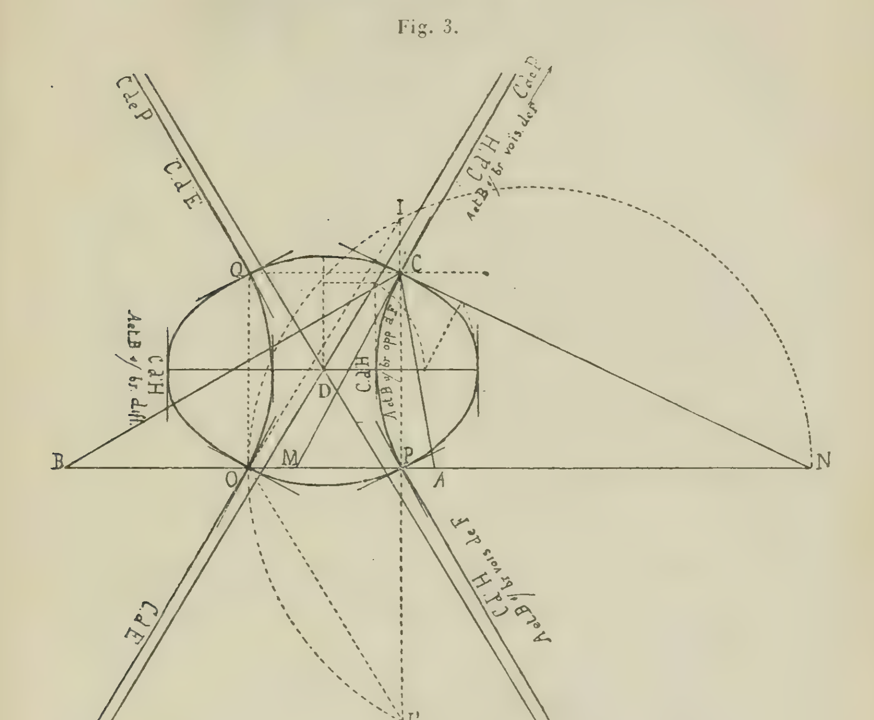
4° Nous savons que, dans tout lieu de centres, les centres de paraboles séparent les centres d'ellipses des centres d'hyperboles. Or, dans notre question, il n'y a que deux paraboles, toutes deux véritables, répondant aux données, et il y en a une dans chaque série de coniques. Leurs centres se trouvent à l'infini sur les branches de l'hyperbole; l'une des branches se compose donc de centres d'ellipses, l'autre de centres d'hyperboles, et, comme le point F est le centre de l'hyperbole réduite aux deux droites FA et FB, la branche de gauche est formée des centres d'ellipses, la branche de droite des centres d'hyperboles.

Voyons maintenant dans quel cas, pour les centres d'hyperboles, A et B sont sur la branche voisine de F ou sur la branche opposée.

Pour que A et B soient sur la branche opposée à F, il faut que la directrice issue de N laisse d'un côté le foyer F et de l'autre A et B; cette directrice sera donc comprise entre FN et NA, et l'axe qui lui est perpendiculaire sera compris entre FM et FN. Donc les points

du lieu situés entre F et P sont les centres pour lesquels A et B sont sur la branche opposée à F.

Fig. 3.



La figure ci-dessus résume les résultats de la discussion.

Note. — La même question a été traitée analytiquement par M. E. Barisien.

SOLUTION DES QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1883;

PAR M. MORET-BLANC.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Trouver la hauteur AB *et les bases* AD, BC *d'un trapèze rectangle* ABCD, *connaissant la longueur l du côté oblique* CD, *l'aire a^2 du trapèze et le volume $\frac{4}{3}\pi b^3$ engendré par la révolution de la figure autour de* CD.

Discuter les formules trouvées et déterminer le minimum et le maximum de b^3. On examinera les cas particuliers suivants :

$$l = a, \qquad l = 3a.$$

Prolongeons AB et DC jusqu'à leur rencontre en E; abaissons CF perpendiculaire sur AD et AH perpendiculaire sur DE.

Posons

$$\mathrm{AB} = x, \qquad \mathrm{AD} = y, \qquad \mathrm{BC} = z,$$

et soit $y > z$.

Les triangles semblables ADE, CDF, ADH donnent

$$\frac{\mathrm{DE}}{l} = \frac{y}{y-z}, \qquad \frac{\mathrm{AH}}{x} = \frac{y}{l};$$

d'où

$$\mathrm{DE} = \frac{ly}{y-z}, \qquad \mathrm{AH} = \frac{xy}{l}.$$

On a

$$\text{vol. ADE} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{\mathrm{AH}}^2 \times \mathrm{DE} = \frac{1}{3}\pi\,\frac{x^2y^3}{l(y-z)},$$

$$\text{vol. BCE} = \text{vol. ADE} \times \frac{z^3}{y^3}$$

et

$$\text{vol. ABCD} = \text{vol. ADE} - \text{vol. BCE} = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2(y^3 - z^3)}{l(y-z)},$$

$$\text{vol. ABCD} = \frac{1}{3}\pi\frac{x^2(y^2 + yz + z^2)}{l}.$$

Cela posé, on a, d'après les données de la question,

(1) $$x^2 + (y-z)^2 = l^2,$$

(2) $$x(y+z) = 2a^2,$$

(3) $$x^2(y^2 + yz + z^2) = lb^3;$$

puis, par la combinaison de ces deux dernières équations,

(4) $$x^2yz = 4a^4 - lb^3,$$

(5) $$x^2(y-z)^2 = 4lb^3 - 12a^4 = 4(lb^3 - 3a^4).$$

On a la somme et le produit des deux quantités x^2 et $(y-z)^2$, qui sont les racines de l'équation

$$u^2 - l^2u + 4(lb^3 - 3a^4) = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{l^2 + \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2},$$

$$(y-z)^2 = \frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2}.$$

Le signe du radical se détermine en remarquant que, pour $lb^3 = 3a^4$, x ne saurait être nul, car alors l et b seraient aussi nuls, ainsi que a, et il n'y aurait plus de trapèze; on ne peut supposer nulles toutes les données.

On a alors

$$\frac{(y+z)^2}{(y-z)^2} = \frac{4a^4}{4(lb^3 - a^4)} = \frac{a^4}{lb^3 - 3a^4},$$

et, par suite,

$$(y+z)^2 = a^4\,\frac{l^2 - \sqrt{l^4 - 16(lb^3 - 3a^4)}}{2(lb^3 - 3a^4)}.$$

En extrayant les racines carrées des valeurs précédentes, on aura

$$x,\quad y+z \quad \text{et} \quad y-z,$$

et, par suite, y et z.

Discussion. — La réalité des valeurs de x, y, z exige que l'on ait

$$l^4 - 16 l b^3 + 48 a^4 > 0 \qquad \text{ou} \qquad b^3 < \frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}.$$

Les équations (4) et (5) montrent que, pour que x, y, z soient positifs, il faut que l'on ait

$$b^3 < \frac{4a^4}{l} \qquad \text{et} \qquad b^3 > \frac{3a^4}{l}.$$

La valeur minimum de b^3 est donc $\frac{3a^4}{l}$, et sa valeur maximum est la plus petite des deux limites $\frac{3a^4}{l} + \frac{l^3}{16}$ et $\frac{4a^4}{l}$; ce sera la première si $l < 2a$, et la seconde si $l > 2a$.

Pour $l = a$, on a le minimum $b^3 = 3a^3$,

$$x = y = z = a :$$

le trapèze est un carré; et le maximum $b^3 = 3a^3 + \frac{a^3}{16}$,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{5a\sqrt{2}}{4}, \qquad z = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Pour $l = 3a$, on a le minimum $b^3 = a^3$,

$$x = 3a, \qquad y = z = \frac{a}{3} :$$

le trapèze est un rectangle; et le maximum $b^3 = \frac{4a^3}{3}$,

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{13} + \sqrt{5}), \qquad y + z = y - z = \frac{a}{2}(\sqrt{13} - \sqrt{5}),$$

$$y = \frac{a}{4}(\sqrt{13} - \sqrt{5}), \qquad z = 0:$$

le trapèze se réduit à un triangle.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

D'un point donné P, *on mène des normales à un ellipsoïde donné :*

1° *Démontrer que par les pieds de ces six normales on peut faire passer une infinité de surfaces du second ordre* S *concentriques à l'ellipsoïde;*

2° *Trouver le lieu que doit décrire le point* P *pour que les surfaces soient de révolution;*

3° *Déterminer le cône, lieu des axes de révolution des surfaces* S;

4° *Sur la section de ce cône par un plan perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde, indiquer les points par lesquels passe l'axe de révolution quand la surface* S *est un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou à deux nappes, un cône, un cylindre ou un système de deux plans parallèles.*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, équations de l'ellipsoïde, $a > b > c$;
x_0, y_0, z_0, coordonnées du point P.

En exprimant que la normale au point (x, y, z) de l'ellipsoïde passe par le point P, on a les équations

$$\frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_0 - y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z_0 - z}{\frac{z}{c^2}} = k.$$

Tirant de ces équations les valeurs de x, y, z et les reportant dans celle de l'ellipsoïde, on a

$$\frac{a^2 x_0^2}{(a^2+k)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2+k)^2} + \frac{c^2 z_0^2}{(c^2+k)^2} - 1 = 0,$$

équation du sixième degré en k. A chacune des valeurs de k correspond une normale : on peut donc, du point P, mener à l'ellipsoïde six normales réelles ou imaginaires.

1° Les équations de condition peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
M &= (b^2 - c^2) yz + c^2 z_0 y - b^2 y_0 z = 0,\\
N &= (c^2 - a^2) zx + a^2 x_0 z - c^2 z_0 x = 0,\\
P &= (a^2 - b^2) xy + b^2 y_0 x - a^2 x_0 y = 0.
\end{aligned}$$

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les pieds des six normales est

$$l\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + m M + n N + p P = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{l x^2}{a^2} + \frac{l y^2}{b^2} + \frac{l z^2}{c^2} &+ m(b^2 - c^2) yz + n(c^2 - a^2) zx\\
&+ p(a^2 - b^2) xy + (p b^2 y_0 - n c^2 z_0) x\\
&+ (m c^2 z_0 - p a^2 x_0) y + (n a^2 x_0 - m b^2 y_0) z - l = 0.
\end{aligned}$$

Pour que cette surface soit concentrique à l'ellipsoïde, il faut que les coefficients de x, y, z soient nuls, ce qui donne

$$\frac{m}{a^2 x_0} = \frac{n}{b_2 y_0} = \frac{p}{c^2 z_0};$$

et l'équation générale des surfaces du second ordre S passant par les pieds des six normales issues du point P, et concentriques à l'ellipsoïde, est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
S = \frac{l x^2}{a^2} + \frac{l y^2}{b^2} + \frac{l z^2}{c^2} &+ a^2(b^2 - c^2) x_0 yz\\
&+ b^2(c^2 - a^2) y_0 zx + c^2(a^2 - b^2) z_0 xy - l = 0.
\end{aligned}\right.$$

Comme on peut donner à l une infinité de valeurs, il y a une infinité de ces surfaces.

2° On exprimera que la surface S est de révolution en écrivant qu'une surface du second ordre passant par son intersection avec la sphère concentrique

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0$$

peut se réduire au système de deux plans parallèles, ce qui exige que les trois plans du centre de la surface

$$S - \lambda\Sigma = 0,$$

$$(A)\quad \begin{cases} 2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)x + c^2(a^2 - b^2)z_0 y + b^2(c^2 - a^2)y_0 z = 0, \\ c^2(a^2 - b^2)z_0 x + 2\left(\dfrac{l}{b^2} - \lambda\right)y + a^2(b^2 - c^2)x_0 z = 0, \\ b^2(c^2 - a^2)y_0 x + a^2(b^2 - c^2)x_0 y + 2\left(\dfrac{l}{c^2} - \lambda\right)z = 0 \end{cases}$$

se confondent, et, par suite, que l'on ait les relations

$$\frac{2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)}{c^2(a^2 - b^2)z_0} = \frac{c^2(a^2 - b^2)z_0}{2\left(\dfrac{l}{b^2} - \lambda\right)} = \frac{b^2(c^2 - a^2)y_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0},$$

$$\frac{2\left(\dfrac{l}{a^2} - \lambda\right)}{b^2(c^2 - a^2)y_0} = \frac{c^2(a^2 - b^2)z_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0} = \frac{b^2(c^2 - a^2)y_0}{2\left(\dfrac{l}{c^2} - \lambda\right)};$$

d'où

$$\begin{aligned} 2\lambda &= \frac{2l}{a^2} - \frac{b^2c^2(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)y_0 z_0}{a^2(b^2 - c^2)x_0} \\ &= \frac{2l}{b^2} - \frac{c^2a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)x_0 z_0}{b^2(c^2 - a^2)y_0} \\ &= \frac{2l}{c^2} - \frac{a^2b^2(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)x_0 y_0}{c^2(a^2 - b^2)z_0}, \end{aligned}$$

et, en éliminant λ et chassant les dénominateurs,

$$(2)\quad \begin{cases} 2l(c^2-a^2)(a^2-b^2)y_0 z_0 = a^2 x_0[b^4(c^2-a^2)^2 y_0^2 - c^4(a^2-b^2)^2 z_0^2], \\ 2l(a^2-b^2)(b^2-c^2)x_0 z_0 = b^2 y_0[c^4(a^2-b^2)^2 z_0^2 - a^4(b^2-c^2)^2 x_0^2], \\ 2l(b^2-c^2)(c^2-a^2)x_0 y_0 = c^2 z_0[a^4(b^2-c^2)^2 x_0^2 - b^4(c^2-a^2)^2 y_0^2]. \end{cases}$$

Ces trois relations se réduisent à deux distinctes. Si on les ajoute après les avoir divisées respectivement par $a^2 x_0$, $b^2 y_0$, $c^2 z_0$, l est éliminé et l'on obtient, en chassant les dénominateurs,

$$(3)\quad \begin{cases} b^2 c^2(c^2-a^2)(a^2-b^2)y_0^2 z_0^2 \\ \quad + c^2 a^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)x_0^2 z_0^2 \\ \quad + a^2 b^2(b^2-c^2)(c^2-a^2)x_0^2 y_0^2 = 0, \end{cases}$$

équation du lieu que doit décrire le point P pour que la surface S soit de révolution : c'est un cône du quatrième ordre, ayant son sommet au centre de l'ellipsoïde.

Quand le point P décrit une génératrice de ce cône, x_0, y_0, z_0 varient proportionnellement, ainsi que l, en vertu des relations (2), et la surface S reste la même. Ainsi, *les pieds des normales, menées à l'ellipsoïde des différents points d'une génératrice du cône* (3), *sont situés sur une même surface de révolution.*

3° En remplaçant λ par sa valeur, l'équation du plan des centres des surfaces $S - \lambda(x^2+y^2+z^2-\rho^2) = 0$, qui est perpendiculaire à l'axe, peut s'écrire

$$\frac{x}{a^2(b^2-c^2)x_0} + \frac{y}{b^2(c^2-a^2)y_0} + \frac{z}{c^2(a^2-b^2)z_0} = 0 ;$$

les équations de l'axe sont donc

$$(4)\quad a^2(b^2-c^2)x_0 x = b^2(c^2-a^2)y_0 y = c^2(a^2-b^2)z_0 z.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 entre ces équations et l'équation (3), on obtient celle du cône des axes

$$(5)\quad a^2(b^2-c^2)x^2 + b^2(c^2-a^2)y^2 + c^2(a^2-b^2)z^2 = 0.$$

4° Si l'on coupe ce cône par le plan $z = z_1$, la section

$$(6)\quad a^2(b^2 - c^2)x^2 + b^2(c^2 - a^2)y^2 + c^2(a^2 - b^2)z_1^2 = 0$$

est une hyperbole dont l'axe transverse se projette sur Oy et l'axe non transverse sur Ox.

Pour faire la distinction des points qui appartiennent aux axes des diverses surfaces de révolution, nous remarquerons que le cône est la limite entre les deux hyperboloïdes ; le système de deux plans parallèles est la limite entre l'hyperboloïde de révolution à deux nappes et l'ellipsoïde de révolution aplati, et le cylindre entre l'hyperboloïde de révolution à une nappe et l'ellipsoïde de révolution allongé. Il suffit donc de chercher les points qui correspondent aux limites.

Pour que la surface S soit un cône, il faut que $l = 0$; l'équation de la surface se réduit à

$$a^2(b^2 - c^2)x_0 yz + b^2(c^2 - a^2)y_0 xz + c^2(a^2 - b^2)z_0 xy = 0,$$

et, pour que cette surface soit de révolution, il faut que l'on ait

$$a^4(b^2 - c^2)^2 x_0^2 = b^4(c^2 - a^2)^2 y_0^2 = c^4(a^2 - b^2)^2 z_0^2.$$

Les équations de l'axe deviennent alors

$$\pm x = \pm y = \pm z,$$

et, pour $z = z_1$,

$$x = \pm z_1, \qquad y = \pm z_1,$$

en tout quatre points.

Si la conique S est le système de deux plans parallèles, ses traces sur chacun des plans de coordonnées seront deux droites parallèles, et l'on aura

$$2l = \pm a^2 bc(b^2 - c^2)x_0 = b^2 ac(c^2 - a^2)y_0$$
$$= c^2 ab(a^2 - b^2)z_0 ;$$

les équations de l'axe deviendront

$$\pm ax = \pm by = \pm cz,$$

et, pour $z = z_1$,

$$x = \pm \frac{c}{a} z_1, \qquad y = \pm \frac{c}{b} z_1.$$

On exprimera que la surface S est un cylindre en écrivant que les équations de l'axe vérifient les trois équations (A) des plans du centre. En remplaçant, dans les résultats, $2\left(\frac{l}{a^2} - \lambda\right)$, $2\left(\frac{l}{b^2} - \lambda\right)$, $2\left(\frac{l}{c^2} - \lambda\right)$ par leurs valeurs, et ayant égard aux équations (2), on a

$$\frac{x^2}{a^2c^2 + a^2b^2 - b^2c^2} = \frac{y^2}{b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2}$$
$$= \frac{z^2}{a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2},$$

d'où, pour $z = z_1$,

$$x = \pm z_1 \sqrt{\frac{a^2(b^2 + c^2) - b^2c^2}{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}},$$
$$y = \pm z_1 \sqrt{\frac{b^2(a^2 + c^2) - a^2c^2}{c^2(a^2 + b^2) - a^2b^2}}.$$

En résumé, les points appartenant aux axes des surfaces de même espèce sont disposés symétriquement sur chacune des quatre demi-branches de l'hyperbole. En considérant celles dont les abscisses sont positives, ils se présentent dans l'ordre suivant :

De $x = 0$ à $x = \frac{c}{a} z_1$, ellipsoïdes de révolution aplatis ;

$x = \frac{c}{a} z_1$, système de deux plans parallèles ;

De $x = \frac{c}{a} z_1$ à $x = z_1$, hyperboloïdes à deux nappes ;

$x = z_1$, cône ;

De $x = z_1$ à $x = z_1\sqrt{\dfrac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, hyperboloïdes à une nappe;

$x = z_1\sqrt{\dfrac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, cylindre de révolution;

$x > z_1\sqrt{\dfrac{a^2(b^2+c^2)-b^2c^2}{c^2(a^2+b^2)-a^2b^2}}$, ellipsoïdes de révolution allongés.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1884;

Par M. E. JAGGI.

On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P *et* Q, *et pour chacune desquelles la droite d'intersection de ces deux plans est axe de symétrie :*

1° *On considère tous les plans* R *tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole, et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre* S *tangentes à la fois à tous les plans* R;

2° *Trouver le lieu des centres des surfaces* S *et déterminer la nature de chacune de ces surfaces suivant la position occupée par son centre;*

3° *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces* S *soient homofocales.*

Nous prendrons pour plans des xz et des yz les plans P et Q des deux coniques, et pour origine le milieu des deux centres.

Les équations des deux coniques seront

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{(z + z_0)^2}{d^2} - 1 = 0.$$

En exprimant que le plan

$$(\text{R}) \qquad ux + vy + wz - 1 = 0$$

a ses traces tangentes aux deux coniques, nous avons les deux relations suivantes

$$f(u, w) = (wz_0 - 1)^2 - b^2 w^2 - a^2 u^2 = 0,$$

$$\varphi(v, w) = (wz_0 + 1)^2 + d^2 w^2 - c^2 v^2 = 0,$$

qui sont les équations des deux coniques en coordonnées tangentielles.

1° On voit immédiatement que les plans R sont tangents aux surfaces du second degré dont l'équation générale est

$$\text{F}(u, v, w) = \lambda f(u, w) + \mu \varphi(v, w) = 0.$$

2° Le lieu des centres est une droite, car on sait qu'en général le lieu des centres des quadriques tangentes à huit plans est une droite. Ici, cette droite est l'axe des z; car, le système des plans étant symétrique par rapport à cet axe, les surfaces le sont aussi. L'analyse le donne aussi simplement : le centre étant le pôle du plan à l'infini, on a, entre ses coordonnées, les relations

$$\frac{x}{\text{F}'_u(0)} = \frac{y}{\text{F}'_v(0)} = \frac{z}{\text{F}'_w(0)} = \frac{1}{\text{F}'_t(0)},$$

d'où l'on tire

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} z_0.$$

Pour discuter la nature de la surface par rapport à la position de son centre, nous introduirons le z du centre dans l'équation en éliminant λ et μ. En appelant ζ ce nouveau paramètre, l'équation F s'écrit

$$\begin{aligned} 0 = w^2[(b^2 + d^2)\zeta - z_0(b^2 - d^2 - 2z_0^2)] \\ + 4wz_0\zeta - a^2u^2(z_0 - \zeta) - c^2v^2(z_0 + \zeta) + 2z_0. \end{aligned}$$

Nous poserons, pour abréger,

$$\zeta_1 = \frac{b^2 - d^2 - 2z_0^2}{b^2 + d^2} z_0.$$

Si $z_0 > b$, $\zeta_1 < -z_0$, ζ variant de $-\infty$ à ζ_1, la surface est un hyperboloïde; pour ζ_1, un paraboloïde hyperbolique; entre ζ_1 et $-z_0$, un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre $-z_0$ et z_0, un hyperboloïde; pour z_0, un cylindre et au delà un hyperboloïde.

Si $z_0 < b$, de $-\infty$ à $-z_0$, la surface est un hyperboloïde; pour $-z_0$, un cylindre; entre z_0 et ζ_1, un ellipsoïde; pour ζ_1, un paraboloïde elliptique; au delà, un hyperboloïde, sauf pour z_0, pour laquelle la surface est un cylindre.

3° Pour exprimer la condition que les surfaces sont homofocales, je remarque qu'il suffit d'écrire que la développable circonscrite à toutes les quadriques passe par le cercle imaginaire de l'infini ou que les plans lui sont tangents.

Il suffit pour cela d'écrire que le plan

$$ux + vy + wz = 0$$

est tangent au cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

ce qui donne

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Cette équation, jointe aux deux suivantes,

$$(wz_0 - 1)^2 - b^2 w^2 - a^2 u^2 = 0,$$
$$(wz_0 + 1)^2 + d^2 w^2 - c^2 v^2 = 0,$$

doit laisser u, v, w variables. En formant l'équation en w qui en résulte et écrivant qu'elle se réduit à une identité, on a les conditions

$$z_0 = 0, \qquad c^2 = -a^2, \qquad d^2 = a^2 - b^2.$$

Les deux coniques ont alors pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2 - a^2} + 1 = 0.$$

On voit que, pour que la seconde conique soit une hyperbole, il est nécessaire de supposer $a^2 < b^2$ et qu'alors elle passe par les foyers de l'ellipse.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL EN 1883;

Par M. Léon ROUSSEL,
Élève du lycée de Bar-le-Duc.

D'un point P *pris sur la normale en un point* A *d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds* B, C, D, E. 1° *On demande de trouver l'équation de la sphère* S *passant par les quatre points* B, C, D, E; 2° *de trouver le lieu des centres* I *de la sphère* S *quand le point* P *se déplace sur la normale au point* A, *ainsi que la surface engendrée par la droite* PI.

Soient α, β, γ les coordonnées du point P ; les coordonnées des points A, B, C, D, E sont données par les équations

$$\frac{\alpha - x}{-1} = p\,\frac{\beta - y}{y} = q\,\frac{\gamma - z}{z} = \lambda,$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x,$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad x = \alpha + \lambda, \qquad y = \frac{p\beta}{p+\lambda}, \qquad z = \frac{q\gamma}{q+\lambda},$$

λ étant racine de l'équation du cinquième degré

$$(2) \qquad \frac{p\beta^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q\gamma^2}{(q+\lambda)^2} = 2(\alpha + \lambda),$$

obtenue en portant les valeurs de x, y, z dans l'équation du paraboloïde. Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, λ_0 la racine correspondante, de telle sorte qu'on a

$$x_0 = \alpha + \lambda_0, \qquad y_0 = \frac{p\beta}{p+\lambda_0}, \qquad z_0 = \frac{q\gamma}{q+\lambda_0}.$$

Cela posé, soit

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$$

l'équation d'une sphère que je suppose passer par les points B, C, D, E. Si j'exprime que cette sphère passe par l'un de ces points, donc les coordonnées sont données par les équations (1), j'obtiens

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &(\alpha + \lambda)^2 + \frac{p^2\beta^2}{(p+\lambda)^2} + \frac{q^2\gamma^2}{(q+\lambda)^2} \\ &\qquad - 2A(\alpha + \lambda) - 2B\,\frac{p\beta}{p+\lambda} - 2C\,\frac{q\gamma}{q+\lambda} + D = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation en λ doit avoir, en commun avec l'équation (2), les quatre racines de cette dernière, autres que λ_0. Si donc je forme, avec les équations (2) et (4),

une combinaison qui ne soit que du quatrième degré en λ, le produit de cette nouvelle équation par $\lambda - \lambda_0$ devra être identique, à un facteur constant près, à l'équation (2). Or cette combinaison est facile à former : il suffit de multiplier (2) par λ et d'ajouter membre à membre avec (4). On trouve ainsi

$$\frac{p\beta}{p+\lambda}(\beta - 2B) + \frac{q\gamma}{q+\lambda}(\gamma - 2C)$$
$$+ (\alpha + \lambda)(\alpha - \lambda - 2A) + D = 0.$$

Multiplions donc cette équation rendue entière par $\lambda - \lambda_0$ et identifions avec l'équation (2), rendue aussi entière, en remarquant que le facteur constant d'identification est 2. On doit alors avoir

$$\begin{aligned}2(\lambda - \lambda_0)[&(\alpha+\lambda)(\alpha-\lambda-2A)(p+\lambda)(q+\lambda)\\ &+ D(p+\lambda)(q+\lambda)\\ &+ q\gamma(\gamma - 2C)(p+\lambda) + p\beta(\beta - 2B)(q+\lambda)]\\ \equiv p\beta^2(q+\lambda)^2 &+ q\gamma^2(p+\lambda)^2 - 2(\alpha+\lambda)(p+\lambda)^2(q+\lambda)^2,\end{aligned}$$

quel que soit λ. Si je fais successivement $\lambda = -p$, $\lambda = -q$, j'obtiens

$$2B = \frac{\beta(p+q+2\lambda_0)}{2(p+\lambda_0)} = \frac{y_0(p+q+2\lambda_0)}{2p},$$
$$2C = \frac{\gamma(p+q+2\lambda_0)}{2(q+\lambda_0)} = \frac{z_0(p+q+2\lambda_0)}{2q}.$$

En égalant les termes du quatrième et du troisième degré en λ, on trouve

$$2A = p + q + x_0,$$
$$-D = (p+\lambda_0)(q+\lambda_0).$$

L'équation de la sphère est donc

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{yy_0(p+q+2\lambda_0)}{2p} - \frac{zz_0(p+q+2\lambda_0)}{2q}$$
$$- x(p+q+x_0) - (p+\lambda_0)(q+\lambda_0) = 0.$$

En mettant cette équation sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{p+q}{z}\left(\frac{yy_0}{\gamma} + \frac{zz_0}{q} + 2x\right) - rx_0$$
$$- \lambda_0\left(\frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} + p + q + \lambda_0\right) - pq = 0,$$

on voit qu'elle passe constamment par l'intersection d'une sphère fixe et d'un plan parallèle à un plan fixe. Donc le lieu du point I est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère fixe sur le plan. Les équations de cette droite sont

$$\text{ZX} = p + q + x_0,$$
$$\frac{p\text{Y}}{y_0} = \frac{q\text{Z}}{z_0}.$$

La droite PI s'appuie déjà sur deux droites fixes, la normale en A et la droite lieu du point I. D'ailleurs ses équations

$$\frac{x - (x_0 - \lambda_0)}{\dfrac{p+q+x_0}{2} - (x_0 - \lambda_0)} = \frac{y - y_0\dfrac{p+\lambda_0}{p}}{\dfrac{y_0(p+q+2\lambda_0)}{4p} - \dfrac{y_0(p+\lambda_0)}{p}}$$
$$= \frac{z - z_0\dfrac{q+\lambda_0}{q}}{\dfrac{z_0(p+q+2\lambda_0)}{4q} - \dfrac{z_0(q+\lambda_0)}{q}}$$

montrent qu'elle reste parallèle au plan fixe

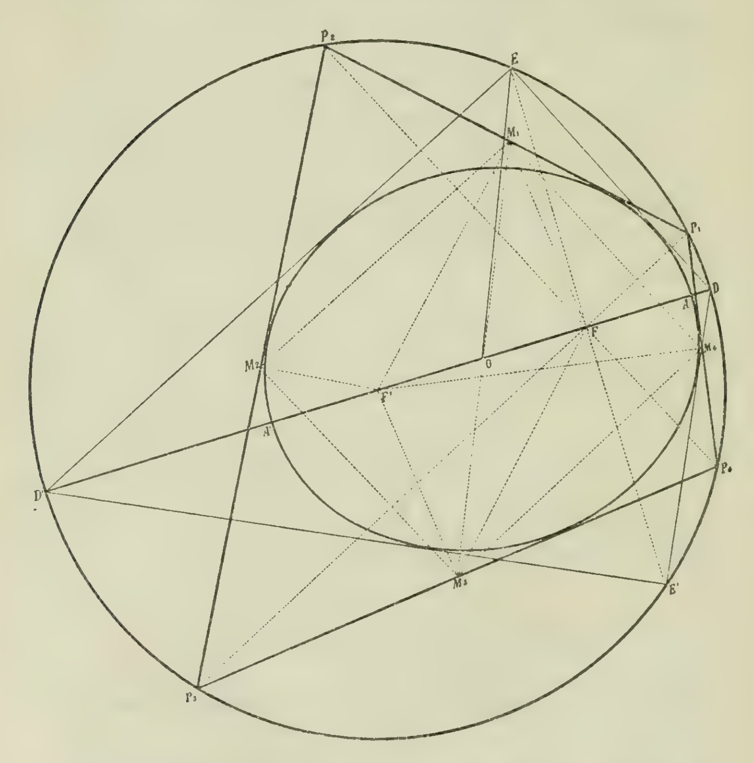
$$\frac{y_0 x + 2py}{y_0(2q - 2p - x_0)} = \frac{z_0 x + 2qz}{z_0(2p - 2q - x_0)}.$$

Donc elle engendre un paraboloïde hyperbolique.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1885;

Par M. F. FARJON, à Boulogne-sur-Mer.

Du foyer F′ *d'une ellipse comme centre on décrit un cercle : d'un point* P_1 *de ce cercle on mène la tangente* P_1P_2 *à la courbe, puis la tangente* P_2P_3, *puis la tan-*



gente P_3P_4, *et il s'agit de déterminer le rayon du cercle de telle sorte que* P_4P_1 *soit aussi tangente.*

Abaissons les perpendiculaires $F'M_1$, $F'M_2$, $F'M_3$, $F'M_4$, le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme, puisque ses sommets sont les milieux des côtés de $P_1P_2P_3P_4$, et il est inscriptible : c'est donc un rectangle, d'où il suit que les diagonales du quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ sont rectangulaires et que le centre O est le milieu de M_1M_3.

On sait que, si un quadrilatère inscriptible a ses diagonales rectangulaires, la droite qui joint le milieu de l'un des côtés au point de concours des diagonales est perpendiculaire sur le côté opposé (¹). Il en résulte que, F désignant le point de concours des diagonales de $P_1P_2P_3P_4$, FM_1 est parallèle à $F'M_3$, et FM_3 parallèle à $F'M_1$; $F'M_1FM_3$ est donc un parallélogramme et le point F, symétrique de F' par rapport à O, est le second foyer de l'ellipse.

Ainsi, tous les quadrilatères, à la fois inscrits dans le cercle F' et circonscrits à l'ellipse, ont leurs diagonales rectangulaires et se coupant au foyer F. Remarquons, en passant, que tous ces quadrilatères ont leur centre de gravité en O.

Cela posé, considérons en particulier le quadrilatère qui a l'un de ses sommets au point D' où le grand axe prolongé rencontre le cercle, F étant le point de concours des diagonales, le sommet opposé sera en D' à l'autre extrémité du diamètre D'F, et les deux autres sommets sur la perpendiculaire FE à ce diamètre. Menons OE, et soit R le rayon cherché ; on a

$$\overline{OE}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FO}^2.$$

(¹) Ce théorème, d'après Chasles, est dû au géomètre indien Brahmegupta, qui vivait au VIᵉ siècle de notre ère (*Aperçu hist.*, Note XII).

l'angle circonscrit D'ED étant droit

$$\overline{OE}^2 = a^2 + b^2;$$

l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$a^2 + b^2 = (R + 2c)(R - 2c) + c^2,$$

d'où

$$R^2 = 2(a^2 + c^2).$$

Note. — Solution identique par M. Théodule Caronnet; solution analytique par M. Juhel-Rénoy.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

Par M. GENTY.

Soit une droite de longueur constante dont les extrémités A_1 et A_2 se déplacent sur deux surfaces données (S_1) et (S_2), de telle manière que les normales à ces surfaces menées aux points A_1 et A_2 respectivement se rencontrent en un point N. La normale au lieu décrit par un point quelconque A de la droite A_1A_2 passe aussi par le point N.

Soient (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) les coordonnées des extrémités de la droite mobile dans l'une de ses positions, et

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1\,dx_1 + B_1\,dy_1 + C_1\,dz_1 = 0, \\ A_2\,dx_2 + B_2\,dy_2 + C_2\,dz_2 = 0 \end{cases}$$

les équations différentielles des surfaces (S_1) et (S_2).

On aura

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{const.};$$

d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2)\\ &\quad + (y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + (z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, les normales aux points A_1 et A_2 auront pour équations

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1},$$

$$\frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2}.$$

La condition qui exprime que ces deux normales se rencontrent est

$$L_1 = L_2,$$

en posant, pour abréger,

$$L_1 = \begin{vmatrix} x_1 & A_1 & A_2 \\ y_1 & B_1 & B_2 \\ z_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad L_2 = \begin{vmatrix} x_2 & A_1 & A_2 \\ y_2 & B_1 & B_2 \\ z_2 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Et, si l'on pose de même

$$M_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_1 \\ y_1 & y_2 & B_1 \\ z_1 & z_2 & C_1 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & A_2 \\ y_1 & y_2 & B_2 \\ z_1 & z_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

on voit sans peine que le point de rencontre N des deux normales a pour coordonnées

$$x = x_1 - \frac{M_2}{L_2} A_1 = x_2 + \frac{M_1}{L_1} A_2,$$

$$y = y_1 + \frac{M_2}{L_2} B_1 = y_2 - \frac{M_1}{L_1} B_2,$$

$$z = z_1 + \frac{M_2}{L_2} C_1 = z_2 + \frac{M_1}{L_1} C_2.$$

Soient maintenant

$$\xi = \frac{l x_1 + m x_2}{l + m}, \qquad \eta = \frac{l y_1 + m y_2}{l + m}, \qquad \zeta = \frac{l z_1 + m z_2}{l + m}$$

les coordonnées du point A, $\frac{l}{m}$ étant un rapport constant.

La relation à démontrer est

$$(x-\xi)\,d\xi+(y-\eta)\,d\eta+(z-\zeta)\,d\zeta=0.$$

ou

$$\sum(x-\xi)\,d\xi=0,$$

ou

$$\sum(x-\xi)(l\,dx_1+m\,dx_2)=0,$$

$$\sum\left[l\left(x_1+\frac{M_2}{L_2}A_1-\frac{lx_1+mx_2}{l+m}\right)dx_1 + m\left(x_1+\frac{M_1}{L_1}A_2-\frac{lx_1+mx_2}{l+m}\right)dx_2\right]=0.$$

ou, en développant et tenant compte des équations (1),

$$\sum\left(lx_1\,dx_1+mx_2\,dx_2-\frac{l^2x_1\,dx_1+lmx_2\,dx_1+lmx_1\,dx_2+m^2x_2\,dx_2}{l+m}\right)=0.$$

ou enfin

$$\sum(x_1\,dx_1+x_2\,dx_2-x_2\,dx_1-x_1\,dx_2)=0,$$

équation identique à la relation (2).

RECTIFICATIONS.

La question 1526, résolue par M. A. Droz, 3e série, t. VI, p. 580, l'a été aussi par MM. Moret-Blanc, Pisani, Valeri et Juhel-Rénoy. Les questions proposées pour l'admission à l'École centrale en 1885 ont été résolues par MM. Lez, Barisien, H. Duclos et Geneix-Martin; en 1886, par M. Barisien; en 1887, par MM. Barisien et K. Troubine, à Perm (Russie).

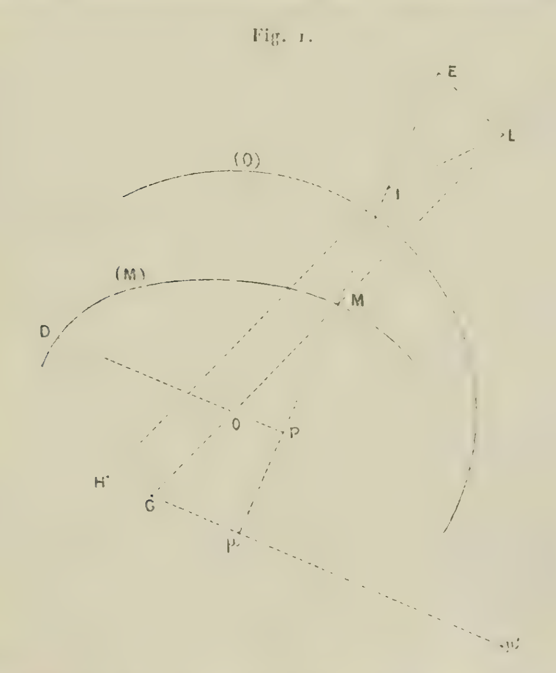
Même Tome, page 157, lignes 5 et 7, prolongez le radical sur -1; page 171, ligne 9, *au lieu de* avec, *lisez* par; page 181, ligne 1, *au lieu de* devrait, *lisez* devait; page 197, ligne 5 en remontant, *après* quelconque, *ajoutez* convergente.

THÉORÈME RÉCIPROQUE D'UN THÉORÈME DE M. E. CESARO ET APPLICATION (¹);

Par M. A. M.

On donne (fig. 1) une courbe (M) *et une circonférence* (O) *de centre* O. *Si la polaire* LE *d'un point*

Fig. 1.



quelconque M *de* (M), *prise par rapport à* (O), *détermine toujours sur les rayons de courbure, tels que* Mμ

(¹) *Voir* à la page 171 de ce Volume.

de (M), *des segments* EM, Eμ *proportionnels, il en est de même des rayons vecteurs, tels que* OM, *relativement aux rayons de courbure de la développée de* (M).

Puisque LE est la polaire de M, par rapport à la circonférence (O), le produit de OM par OL est constant. La courbe (L), lieu des points tels que L, est donc la transformée par rayons vecteurs réciproques de (M); la normale LI à (L) et la normale MI à (M) sont, par suite, également inclinées sur LM. Le point I est alors le milieu de l'hypoténuse ME du triangle EML. La courbe (I), lieu des points tels que I, peut être considérée comme le lieu des points également distants de (L) et de (M). La tangente en I à (I) passe alors par le point de rencontre des tangentes en L et M à (L) et (M). Comme IL = IM, cette tangente est la bissectrice de l'angle LIM et par suite la normale en I à (I) est la parallèle IH à LM.

Appelons μ' le centre de courbure de la développée de (M) pour le point μ de cette courbe.

Par hypothèse $\frac{M\mu}{ME}$ = const. Appelons λ ce rapport, on a alors

$$\frac{M\mu}{MI} = 2\lambda \qquad \text{et aussi} \qquad \frac{\mu I}{M\mu} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Quel que soit le point M, les courbes (I), (M) et la développée de cette dernière courbe déterminent sur μI des segments proportionnels : on a alors [1]

$$\frac{\mu'\mu}{\mu H} = \frac{\mu M}{MI} = 2\lambda, \qquad \text{d'où} \qquad \mu H = \frac{\mu'\mu}{2\lambda}.$$

Prolongeons MO jusqu'à sa rencontre G avec $\mu'\mu$.

[1] MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive*, 2e édition, p. 203 et suivantes.

On a

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{\mu I}{\mu M}.$$

Nous avons écrit précédemment la valeur de ce dernier rapport; on a alors

$$\frac{\mu H}{\mu G} = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Introduisant ici la valeur de μH trouvée plus haut, on obtient

$$\frac{\mu'\mu}{\mu G} = 2\lambda + 1.$$

Le théorème est alors démontré.

Pour appliquer ce théorème à l'ellipse, nous allons d'abord démontrer géométriquement un théorème qui se trouve dans le travail de M. Cesaro [1]. Nous conservons la *fig.* 1, en supposant que (M) soit une ellipse dont les demi-axes sont a et b et que (O) ait pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

La polaire LE *du point* M *de l'ellipse* (M), *par rapport à la circonférence* (O) *dont le rayon est égal à* $\sqrt{a^2 + b^2}$, *rencontre la normale* ME *à l'ellipse en un point* E *tel que* ME *égale le rayon de courbure* $M\mu$ *de l'ellipse en* M.

Puisque le rayon de (O) est $\sqrt{a^2 + b^2}$, il résulte de cet énoncé que

$$OM \times OL = a^2 + b^2;$$

de là

$$OL - OM = \frac{a^2 + b^2 - \overline{OM}^2}{OM}.$$

---

(1) *Voir* page 175 de ce Volume.

Menons le diamètre OD perpendiculairement à $M\mu$, on a

$$\overline{OD}^2 + \overline{OM}^2 = a^2 + b^2.$$

On peut donc écrire (OL — OM) ou $ML = \frac{\overline{OD}^2}{OM}$.

Mais on sait que le rayon de courbure de l'ellipse en M est égal à $\frac{\overline{OD}^2}{MP}$; on a alors

$$\frac{ML}{M\mu} = \frac{MP}{OM} = \frac{ML}{ME};$$

donc $ME = M\mu$. Ce qu'il fallait démontrer.

Centre de courbure de la développée de l'ellipse. — Pour avoir ce centre de courbure, il suffit d'appliquer le théorème précédent à l'ellipse. On trouve ainsi qu'*on obtient le centre de courbure* μ' *de la développée de l'ellipse* (M) *en prolongeant* $G\mu$ *de trois fois sa longueur*. Ce qui est la construction due à Maclaurin.

RECHERCHE DES POINTS DOUBLES DANS LES COURBES UNICURSALES;

Par M. X. ANTOMARI,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

Soit une courbe unicursale définie par les deux équations

$$x = \frac{f(t)}{\psi(t)}, \qquad y = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

dans lesquelles $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des polynômes entiers en t. Pour trouver les points doubles de cette

courbe, on cherche habituellement les valeurs distinctes t_1 et t_2 données à t, et vérifiant les deux équations

$$\frac{f(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{f(t_2)}{\psi(t_2)}, \qquad \frac{\varphi(t_1)}{\psi(t_1)} = \frac{\varphi(t_2)}{\psi(t_2)}.$$

Dans la plupart des cas, la résolution de ces équations conduit à des calculs assez compliqués, à cause des solutions étrangères. La recherche des points doubles peut se faire par un procédé généralement plus simple, et qui n'introduit pas de solutions étrangères. L'exposition de ce procédé fait l'objet de la présente Note.

Les équations de la courbe peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \psi(t)x - f(t) = 0,$$

$$(2) \qquad \psi(t)y - \varphi(t) = 0.$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la courbe, il faudrait éliminer t entre les équations (1) et (2). Soient x et y les coordonnées d'un point de la courbe. Il résulte de la théorie des lieux géométriques que si, pour ce point, les équations (1) et (2) ont deux racines communes en t, le point (x, y) est un point double du lieu défini par ces deux équations (voir, à ce sujet, Bourdon, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie*, Notes de M. Darboux).

On conclut immédiatement de là que, pour trouver les points doubles de la courbe unicursale, il faut trouver les valeurs de x et de y pour lesquelles les deux polynômes

$$x\psi(t) - f(t) = 0,$$
$$y\psi(t) - \varphi(t) = 0$$

ont un diviseur commun du second degré en t. De même, pour obtenir les points triples, on cherchera les valeurs de x et de y pour lesquelles les mêmes polynômes

ont un diviseur commun du troisième degré, et ainsi de suite.

Exemple I. — Trouver les points doubles de la courbe définie par les deux équations

$$x = \frac{t}{(t-1)(t+1)}, \qquad y = \frac{t-2}{(t-1)(t+2)} \quad [1].$$

Mettons ces équations sous forme entière

$$t^2 x - t - x = 0,$$
$$t^2 y + (y-1)t - 2(y-1) = 0.$$

Elles sont du second degré. Pour qu'elles admettent un diviseur commun du second degré, il faut qu'elles soient identiques. En identifiant, on obtient

$$\frac{x}{y} = -\frac{1}{y-1} = \frac{x}{2(y-1)};$$

d'où l'on tire, sans calculs,

$$x = -2, \qquad y = 2.$$

Exemple II. — Points doubles de la courbe :

$$x = \frac{t-2}{(t^2-1)(t+2)}, \qquad y = \frac{2t-5}{(t-1)(t+2)}.$$

Il faut trouver les valeurs de x et de y, pour lesquelles les deux polynômes

$$x(t^2-1)(t+2) - (t-2)$$

et

$$y(t-1)(t+2) - (2t-5)$$

ont un diviseur commun du second degré. Soit $\lambda t + \mu$ un facteur indéterminé du premier degré; nous allons

[1] Pruvost, *Géom. analyt.*

déterminer λ, μ, x et y de manière à vérifier l'identité

$$\begin{aligned} &x(t^2-1)(t+2)-(t-2) \\ &\quad=(\lambda t+\mu)[y(t-1)(t+2)-(2t-5)]. \end{aligned}$$

Exprimons, pour cela, que ces deux expressions sont égales pour les quatre valeurs de t, $t=1$, $t=-1$, $t=2$ et $t=-2$. Nous obtiendrons, pour déterminer λ, μ, x et y, les quatre équations

$$\begin{aligned} 1 &= 3(\lambda+\mu), \\ 3 &= (\mu-\lambda)(7-2y), \\ 12x &= (2\lambda+\mu)(4y+1), \\ 4 &= 9(\mu-2\lambda), \end{aligned}$$

qui donnent bien facilement

$$\lambda=\frac{7}{27}, \qquad \mu=\frac{2}{27}, \qquad x=\frac{4\times 79}{5\times 27} \qquad \text{et} \qquad y=\frac{58}{5}.$$

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE LIÉE A LA THÉORIE DES NORMALES A UNE QUADRIQUE;

Par M. A. del Re, à Naples.

Je ne sais si l'on a jamais pensé à la question suivante, mais elle peut être de quelque intérêt dans la théorie de la surface des centres d'une surface donnée du deuxième ordre. Soient Σ cette dernière surface, Σ_c sa surface des centres et P un point quelconque de l'espace. Si, du sommet P, on circonscrit à Σ_c le cône (P), il y aura, dans chaque plan tangent de ce cône, une seule normale à Σ : *on se propose de chercher le lieu des pieds de toutes les normales ainsi obtenues.*

Par le point P menons un plan quelconque σ, et, par son pôle S, par rapport à Σ, menons la perpendiculaire s

à ce plan. Lorsqu'on fait varier σ autour de P, le point S et le point à l'infini de s décrivent deux systèmes plans réciproques à la gerbe décrite par σ, et, conséquemment, collinéaires entre eux. Donc la droite s et le plan σ se coupent (*voir* ma Note *Nuova costruzione della sup. del. 5° ordine*, etc., dans les *Rendiconti dell' Acc. di Napoli*, 1886) dans un point M qui décrit une surface du cinquième ordre douée d'une courbe double du même ordre et ayant un point triple au point P. Nommons Φ cette surface. Elle est précisément celle que M. Darboux [1] obtient en cherchant le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces homofocales à Σ, conduits par P, et cette coïncidence je l'ai démontrée dans ma Note citée. La surface Φ passe donc, comme il est d'ailleurs presque évident, par la conique (Π), suivant laquelle Σ est coupée par le plan polaire Π de P, par rapport à Σ; et *ces deux surfaces Σ et Φ ont ultérieurement en commun une courbe du huitième ordre* C^8. Je dis que *cette courbe est le lieu cherché.*

En effet, prenons un point quelconque M de la surface Φ, et soient σ et s le plan et la droite, construits comme précédemment, qui l'ont fourni. Si dans le plan σ on conduit par M les tangentes à Σ, les points de contact de ces deux tangentes seront les pieds des deux normales à cette surface contenues en σ [2]. Donc on aura ces deux normales coïncidentes, c'est-à-dire que σ sera un plant tangent de (P), si le point M est un point aussi bien de Φ que de Σ, sans être un point de (Π),

---

(1) *Sur la surface du cinquième ordre*, etc. (*Bulletin des Sciences math. et astronom.*, p. 40; 1872).

(2) Cette propriété, je l'ai démontrée dans ma Note *Sulle normali alle sup. di 2° ordine, ai coni ed alle coniche sferiche* (Naples, tipogr. Trani, 1884); mais elle est d'ailleurs presque évidente.

dans lequel cas σ est tangent à Σ en M. Mais, lorsque cela arrive, le point M est même le pied de l'unique normale dans le plan σ; donc la proposition est ainsi démontrée.

Une première conséquence qui suit de la définition de la courbe C^8, c'est que *par le point* P *passent six cordes à cette courbe, que celles-ci sont les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et que enfin la courbe a quatre points sur le cercle à l'infini*. En effet, la surface Φ a six droites qui aboutissent au point P, formant les arêtes d'un angle tétraèdre complet, et passe par le cercle à l'infini.

2. Si l'on voulait résoudre la même question par rapport à une surface Σ', homofocale à Σ, on arriverait à la même surface Φ, grâce à la double définition de cette surface. Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante :

Lorsqu'on circonscrit aux surfaces des centres de courbure d'une suite de surfaces homofocales du deuxième ordre (Σ) *les cônes ayant tous un même sommet* P, *le lieu des pieds des normales à ces surfaces contenues dans les plans tangents aux cônes correspondants est une surface du cinquième ordre, laquelle est même le lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces* (Σ), *menés par* P.

3. La question que nous venons de résoudre peut être envisagée à un point de vue plus général.

Soient Σ et Σ' deux surfaces données du deuxième ordre, et Ω l'homographie résultant de la composition des polaires, par rapport à elles. Dans cette homographie, si l'on joint les points de Σ aux points correspondants de la surface Σ'', transformée de Σ, on obtient un

système Θ du sixième ordre et de la deuxième classe (¹), dont soit Σ_Θ la surface focale. Il s'agit de chercher le lieu des points de Σ tels que les rayons correspondants de Θ soient projetés d'un point P, donné arbitrairement, au moyen de plans tangents à la surface Σ_Θ. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'au moyen de la surface du cinquième ordre, engendrée par les points de rencontre des plans de P avec les droites qui unissent les couples des pôles de ces plans par rapport à Σ, Σ′, on arrive à des conclusions parfaitement analogues à celles que nous avons exposées dans les numéros précédents.

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS IMPLICITES;

Par M. WORONTZOF.

Soient

$$m = f(y),$$
$$x = \Phi(y) = \Psi[f(y)]$$

deux équations entre les variables x, y et m;

$$y = f_\nu(m), \qquad y = f_\nu(0) = r \quad (^2)$$

(¹) Les droites du système Θ ne sont que les *normales* à la surface Σ dans l'espace où l'*absolu* est la surface Σ′.

(²) Soit, par exemple

$$f(m) = e^m - 1, \qquad \sin m, \qquad (m+c)^a,$$
$$\frac{a-m}{c+m}, \qquad \frac{1-m}{1+m}, \qquad \ldots;$$

on a respectivement

$$f_\nu(m) = \log(m+1), \qquad \arcsin m, \qquad m^{\frac{1}{a}} - c,$$
$$\frac{a-cm}{1+m}, \qquad \frac{1-m}{1+m}, \qquad \ldots.$$

les racines des équations

$$f(y) - m = 0, \qquad f(y) = 0,$$

de sorte qu'on ait identiquement

$$f[f_\nu(m)] = m, \qquad f(r) = 0;$$

et $F(x)$ une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de m. Si l'on donne

$$x = \Phi[r + m\,\varphi(x)],$$

on a alors

$$m = f(y) = \frac{y - r}{\varphi[\Phi(y)]},$$

$$x = \Phi(y).$$

En vertu des égalités

$$\left[\frac{d\,\Psi(m)}{dm}\right]_{m=f(y)} = [D_m \Psi(m)]_{m=f(y)}$$

$$= \Psi'[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)}\right] D_y \Psi[f(y)],$$

$$[D_m^2 \Psi(m)]_{m=f(y)} = \Psi''[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(2)} \Psi[f(y)]$$

$$= \left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right] \Psi[f(y)],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$[D_m^n \Psi(m)]_{m=f(y)} = \Psi^{(n)}[f(y)] = \left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(n)} \Psi[f(y)],$$

on obtient, en substituant $f_\nu(m)$ au lieu de y,

$$\Psi^{(n)}(m) = D_m^n \Psi\{f[f_\nu(m)]\}$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(n)} \Psi[f(y)]\right\}_{y=f_\nu(m)},$$

ou, en remplaçant $\Psi[f(y)]$ par $\Phi(y)$,

$$D_m^n \Phi[f_\nu(m)] = D_m^n \Phi(y) = \left\{\left[\frac{1}{f'(y)} D_y\right]^{(n)} \Phi(y)\right\}_{y=f_\nu(m)},$$

ou, plus généralement,

$$(1)\quad \begin{cases} D_m^n F[\Phi(y)] = D_m^n F(x) \\ \qquad = \left\{ \left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(n)} F[\Phi(y)] \right\}_{y=f_\nu(m)}. \end{cases}$$

Au moyen de la formule précédente et de la série de Maclaurin, prise avec le terme complémentaire (R_n) de Lagrange, on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} F[\Phi(y)] \\ \quad = F\{\Phi[f_\nu(m)]\} = F(x) = F[\Phi(r)] \\ \qquad + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2.3\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(k)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r} \\ \qquad + \frac{m^n}{1.2.3\ldots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(n)} F[\Phi(z)] \right\}_{z=r+\theta(y-r)=f_\nu(\theta_1 m),\, y=f_\nu(m)=\Phi_\nu(x)} \end{cases}$$

et aussi, pour $\Phi(y) = y = x$,

$$(3)\quad \begin{cases} F[f_\nu(m)] = F(x) = F(r) \\ \qquad + \left\{ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{m^k}{1.2\ldots k} \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(k)} F(z) \right\}_{z=r} \\ \qquad + \frac{m^n}{1.2\ldots n} \left\{ \left[\frac{1}{f'(z)} D_z \right]^{(n)} F(z) \right\}_{z=r+\theta(x-r)=f_\nu(\theta_1 m)}, \end{cases}$$

où $0 < \theta < 1$.

Exemple. — En posant successivement

$$x = \Phi(y) = e^{ay}, \qquad m = f(y) = e^{cy} - h,$$
$$x = y^a, \qquad m = y^c - h,$$
$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a

$$\left[\frac{1}{f'(y)} D_y \right]^{(k)} \Phi(y) = \left(\frac{e^{-cy}}{c} D_y \right)^{(k)} e^{ay}$$
$$= a(a-c)(a-2c)\ldots[a-(k-1)c]\, \frac{e^{(a-kc)y}}{c^k},$$

$$y = \log(h+m)^{\frac{1}{c}}, \qquad r = \log h^{\frac{1}{c}}.$$

$$\left(\frac{1}{c y^{c-1}} D_y\right)^{(k)} y^a$$
$$= a(a-c)(a-2c)\ldots[a-(k-1)c]\,\frac{y^{a-kc}}{c^k},$$
$$y = (h+m)^{\frac{1}{c}}, \qquad r = h^{\frac{1}{c}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots,$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$x = h^{\frac{a}{c}} + a\frac{m}{c}h^{\frac{a}{c}-1} + \frac{a(a-c)}{1.2}\left(\frac{m}{c}\right)^2 h^{\frac{a}{c}-2} + \ldots$$
$$+ \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-2)c]}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(\frac{m}{c}\right)^{n-1} h^{\frac{a}{c}-(n-1)} + R_n = (h+m)^{\frac{a}{c}},$$

où

$$R_n = \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left(1+\frac{\theta m}{h}\right)^{\frac{a}{c}-n}$$
$$= \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left(1+\frac{m}{h}\right)^{\theta_1\left(\frac{a}{c}-n\right)}$$
$$= \frac{a(a-c)\ldots[a-(n-1)c]}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{m}{c}\right)^n h^{\frac{a}{c}-n}\left\{1+\theta_2\left[\left(1+\frac{m}{h}\right)^{\frac{1}{c}}-1\right]\right\}^{a-nc}.$$

REMARQUES SUR L'INTÉGRATION PAR PARTIE ;

Par M. Ph. GILBERT, à Louvain.

Les cas dans lesquels l'intégration par partie s'applique avantageusement, en ramenant l'intégrale proposée à elle-même ou à une autre plus simple, sont moins généraux qu'on ne le croit d'ordinaire, et supposent entre les fonctions sous le signe $\int$ des relations très étroites.

Ainsi, soient u, v deux fonctions de x, n un nombre entier, et posons

$$\int v\,dx = v_1, \qquad \int v_1\,dx = v_2, \qquad \ldots.$$

La formule

$$(1) \qquad \int u^n v\,dx = u^n v_1 - n \int u^{n-1} v_1\,du$$

conduit, lorsqu'on a entre u et v la relation

$$v_1\,du = \frac{v}{\alpha}\,dx \quad (\alpha \text{ constant}),$$

à la formule de *réduction* assez employée

$$(2) \qquad \int u^n v\,dx = u^n v_1 - \frac{n}{\alpha} \int u^{n-1} v\,dx.$$

Mais la condition ci-dessus donne

$$\alpha \frac{du}{dx} = \frac{v}{v_1} = \frac{1}{v_1} \frac{dv_1}{dx},$$

d'où, β étant une constante,

$$l.v_1 = \alpha u + \beta, \qquad v_1 = e^{\alpha u + \beta}, \qquad v = \alpha e^{\alpha u + \beta} \frac{du}{dx}.$$

C'est la forme la plus générale de v qui se prête à la transformation (2), et elle est entièrement déterminée par celle de u.

On peut généraliser la question et poser, dans (1),

$$v_1\,du = \left(\beta u + \frac{\alpha}{u^{p-1}}\right) v\,dx,$$

α, β, p étant des constantes. On a alors, au lieu de la formule (1), celle-ci

$$(3) \qquad \int u^n v\,dx = \frac{u^n v_1}{1 + n\beta} - \frac{n\alpha}{1 + n\beta} \int u^{n-p} v\,dx.$$

Mais on a aussi, pour déterminer v_1 et par suite v, l'égalité

$$\frac{v}{v_1} = \frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx} = \frac{u^{p-1}}{\alpha + \beta u^p}\frac{du}{dx},$$

et cette équation intégrée donne, en négligeant une constante inutile,

$$v_1 = (\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}}, \qquad v = u^{p-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1}\frac{du}{dx};$$

v est donc encore déterminé par u. L'équation (3) devient donc

$$\int u^{n+p-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1} du$$
$$= \frac{u^n(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}}}{1 + n\beta} - \frac{n\alpha}{1+n\beta}\int u^{n-1}(\alpha + \beta u^p)^{\frac{1}{\beta p}-1} du,$$

ce qui est, au fond, la formule de réduction des différentielles binômes.

L'intégration par partie donne immédiatement

$$\int uv\, dx = uv_1 - \int v_1 \frac{du}{dx} dx,$$
$$\int v_1 \frac{du}{dx} dx = v_2 \frac{du}{dx} - \int v_2 \frac{d^2 u}{dx^2} dx.$$

Si l'on suppose entre u et v la relation

$$v_2 \frac{d^2 u}{dx^2} = \mu u v \quad (\mu \text{ constant}),$$

on aura

$$\int uv\, dx = uv_1 - v_2 \frac{du}{dx} + \mu \int uv\, dx,$$

d'où l'on tirera

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\int uv\, dx = \frac{1}{1-\mu}\left(uv_1 - v_2 \frac{du}{dx}\right), \\ \displaystyle\int v_1 \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{1-\mu}\left(v_2 \frac{du}{dx} - \mu u v_1\right). \end{cases}$$

Mais l'équation de condition peut s'écrire

$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\mu}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx_2},$$

en sorte que, si l'on désigne par $\varphi(x)$ une fonction donnée de x, et si l'on pose

$$\frac{d^2u}{dx^2} = u\,\varphi(x),$$

on aura

$$\frac{d^2v_2}{dx^2} = \frac{v_2}{\mu}\varphi(x).$$

L'intégration de ces équations fera connaître u et v_2, et par suite $v = \frac{d^2v_2}{dx^2}$. *Ainsi, si u et v_2 désignent deux intégrales quelconques de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\,\varphi(x)y,$$

répondant à des valeurs différentes de la constante C, *on pourra trouver sous forme finie l'intégrale*

$$\int u\frac{d^2v_2}{dx^2}\,dx.$$

Si l'on pose $\varphi(x) = \alpha^2$, $\alpha^2 = -\mu\beta^2$, on retrouvera les formules connues. Si l'on pose $\varphi(x) = \alpha x^m$, u et v_2 seront déterminés par des équations de Riccati. La liaison de ce qui précède avec les propriétés des fonctions sphériques et des fonctions de Bessel, dont on fait usage dans la théorie de la chaleur, est facile à apercevoir.

SUR LA COURBURE DANS LES CONIQUES;

PAR M. CL. SERVAIS,
Répétiteur à l'Université de Gand.

1. Les propriétés dont nous nous occupons dans la présente Note se déduisent d'un cas particulier de la transformation de Hirst; la conique fondamentale est un cercle S et le pôle un point A de ce cercle. Désignons par S′ le cercle décrit sur ωA comme diamètre, ω étant le centre de S; S′ correspond à la droite à l'infini du

Fig. 1.

plan. La transformée d'une droite (D) est une conique (D′) tangente à S′ au point A. Ce sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que la droite (D) rencontre S′ en deux points imaginaires, réels ou coïncidents. La droite (D) n'ayant qu'un point à l'infini, sa transformée (D′) n'aura avec S′ qu'un seul point commun K autre que A. Donc S′ est le cercle osculateur à la conique au point A, et la corde de courbure AK est

parallèle à (D). Il résulte de ce qui précède le théorème suivant :

Théorème I. — *En un point* A *d'une conique on décrit un cercle tangent, dont le rayon est égal au diamètre du cercle osculateur en ce point, et l'on mène différentes sécantes rencontrant la conique et le cercle en des points* B *et* C. *Le lieu du point* D, *tel que*

$$(ABCD) = -1,$$

est une droite parallèle à la corde de courbure.

Considérons deux sécantes ABCD, AB′C′D′; on a

$$(ABCD) = (AB'C'D') = -1.$$

Le point A étant commun aux deux groupes de points, les droites BB′, CC′, DD′ sont concourantes. A la limite, on voit que les tangentes aux points B et C à la conique et au cercle se coupent sur la droite (D).

2. Soient B et C les points d'intersection de (D′) et de S; P le pôle de BC par rapport à S; p et a les points de rencontre de la droite AP avec (D) et S; on a

$$(AaPp) = -1:$$

donc P est un point de la conique. Les tangentes à S aux points A et a se coupant sur BC, il en sera de même des tangentes à la conique aux points A et P (n° 1); les droites AP et BC sont donc conjuguées par rapport à la conique. De là :

Théorème II. — *Si, en un point* A *d'une conique, on décrit un cercle tangent dont le rayon soit égal au diamètre du cercle osculateur, le pôle* P *par rapport à ce cercle de la corde interceptée* BC *est situé sur la conique; les deux droites* AP *et* BC *sont conjuguées par rapport à la conique.*

3. Représentons par N' le point d'intersection des droites BC et $A\omega$, et par N son correspondant; ce point N sera le point où la normale au point A rencontre la conique. La polaire du point N' par rapport à S, devant passer par les points P et N, PN est perpendiculaire sur AN. P étant le pôle de BC, $P\omega$ est perpendiculaire au point K sur la corde de courbure AK. Donc :

Théorème III. — *La circonférence décrite sur* PA *comme diamètre rencontre la conique en deux points* N *et* K, *dont l'un est l'extrémité de la normale et l'autre l'extrémité de la corde de courbure au point* A; *les deux droites* PK *et* AN *se coupent au point* ω, *diamétralement opposé à* A *sur le cercle de courbure à la conique en ce point.*

Les droites PA et BC étant conjuguées par rapport à la conique, le faisceau N(PABC) est harmonique; mai NP est perpendiculaire à NA : donc cette dernière droite est la bissectrice de l'angle BNC.

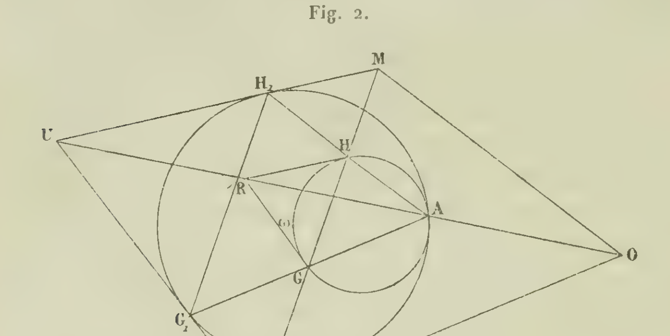
4. Soit F le point de rencontre de PN et AK; ωF sera la troisième hauteur du triangle PAF et elle passera par E. Donc :

Théorème IV. — *Le pôle de* PA, *le point d'intersection des droites* PN *et* AK *et le point* ω, *diamétralement opposé au point* A *sur le cercle de courbure en ce point, sont sur une droite perpendiculaire à* PA.

Ces propriétés donnent une construction nouvelle du centre de courbure en un point A d'une conique. On détermine successivement les points N, P, E, ω; le milieu de $A\omega$ est le point cherché. Si la conique est donnée par cinq points, la construction est linéaire en faisant usage du théorème de Pascal.

5. Supposons que la droite (D) rencontre le cercle S′ en deux points G et H; dans ce cas, la conique est une hyperbole. Les droites AG et AH rencontrent le cercle S aux points G_1 et H_1. Menons les tangentes à S en ces

Fig. 2.



points et appelons L et M les points d'intersection de ces tangentes avec (D). Les parallèles LO et MO menées de L et M respectivement à AG et AH sont les asymptotes de l'hyperbole (n° 1), et O est le centre de la courbe. Les triangles AG_1H_1, LOM, ayant leurs côtés parallèles deux à deux, les droites AO, G_1L, H_1M se coupent en un même point U. Soit R le pôle de GH par rapport à S′; les droites RU, G_1, G, H_1 H se coupent en un même point A; ou bien R est sur le diamètre OA. Donc :

Théorème V. — *Si par un point* A *de l'hyperbole on mène des parallèles aux asymptotes, la corde interceptée dans le cercle de courbure est parallèle à la corde de courbure; son pôle par rapport au cercle de courbure est situé sur le diamètre de l'hyperbole correspondant au point* A.

On peut remplacer le cercle de courbure par un cercle quelconque tangent à la conique au point A.

6. Si la droite (D) passe par ω, la normale en A est parallèle à une asymptote et (D) est perpendiculaire à l'autre; comme BC passe par ω, on a $BC = 2A\omega$. Donc :

Théorème VI. — *Soit A le point d'une hyperbole où la normale est parallèle à une asymptote; si, par le point diamétralement opposé à A sur le cercle de courbure en ce point, on mène une perpendiculaire à l'autre asymptote, le segment intercepté par l'hyperbole sur cette droite est double du diamètre du cercle osculateur au point* A.

Ce théorème suppose que l'angle des asymptotes, qui contient les diamètres imaginaires, soit obtus.

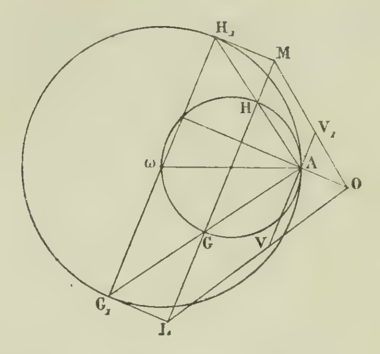
7. Si (D) passe par le centre de S', l'hyperbole (D') est équilatère, et la corde interceptée par le cercle de courbure sur le diamètre OA est double de OA. *La puissance du centre O d'une hyperbole équilatère, par rapport au cercle de courbure en un point A de cette courbe, est égale à* $3\overline{AO}^2$.

On voit aussi que la projection du centre de courbure sur le diamètre décrit une hyperbole équilatère homothétique à l'hyperbole donnée, le rapport d'homothétie étant égal à 2. Or la projetante est la droite (D); donc *l'enveloppe de la droite (D) est l'antipodaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre.*

La corde de courbure au point A est perpendiculaire à OA; soient V et V_1 les points où elle rencontre les asymptotes; ces points sont les milieux de OM et

OL : donc $VV_1 = GH$ et les droites HV_1 et GV sont tangentes à S'. Donc :

Fig. 3.



Théorème VII. — *En un point* A *d'une hyperbole équilatère, le segment intercepté par les asymptotes sur la corde de courbure est égal au diamètre du cercle osculateur; les parallèles, menées par les extrémités de ce segment, au diamètre passant par* A *sont tangentes à ce cercle.*

Ce théorème donne une construction simple du cercle de courbure en un point de l'hyperbole équilatère donnée par ses asymptotes.

SUR LES TRANSFORMATIONS DE LA SÉRIE DE LAMBERT;

Par M. E. CESARO.

Si l'on donne aux deux séries convergentes

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \qquad V = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

il est tout naturel de dire que la seconde *converge*

moins que la première lorsque le rapport de son reste β_n au reste α_n de la première série augmente indéfiniment avec n. Si le rapport en question tend vers zéro, la première série converge moins que la seconde. Si la première série est à termes positifs, et que le rapport de v_n à u_n tende vers une limite λ, il existe, pour tout nombre ε, arbitrairement petit, un nombre fini ν, tel que, pour $n > \nu$, les rapports

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}, \quad \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{v_{n+p}}{u_{n+p}},$$

et, par suite,

$$\frac{v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}}{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}},$$

sont tous compris entre $\lambda + \varepsilon$ et $\lambda - \varepsilon$, quel que soit p. Donc, p croissant à l'infini, le rapport de β_n à α_n est compris entre $\lambda + \varepsilon$ et $\lambda - \varepsilon$ pour toutes les valeurs de n supérieures à ν. Autrement dit,

$$(1) \qquad \lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim \frac{v_n}{u_n},$$

pourvu que le second membre existe. On peut donc comparer deux séries, au point de vue de leur convergence, en étudiant le rapport de leurs termes généraux. Ainsi, par exemple, la série $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots$ est *plus convergente* que la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, parce que $\lim \alpha_n = 0$.

La série U étant donnée, on peut toujours construire une infinité d'autres séries, qui convergent moins. Il suffit de prendre

$$v_n = f(u_n + u_{n+1} + \ldots) - f(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots),$$

en supposant que $f(x)$ tende vers zéro avec x, tandis

que sa dérivée croît à l'infini. On a, en effet,

$$\lim \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \lim \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n} = \lim f'(\alpha_n) = \infty.$$

Ailleurs [1] nous avons démontré une proposition analogue pour les séries divergentes. Il est donc impossible de concevoir qu'on puisse effectivement séparer la classe des séries convergentes de celle des séries divergentes.

Si, dans la série U, le rapport d'un terme au terme précédent tend vers une limite λ, et que l'on prenne $v_n = u_{n+1}$ dans la relation (1), on obtient

$$\lim \left(1 - \frac{u_{n+1}}{\alpha_n}\right) = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda,$$

d'où

$$\lim \frac{\alpha_n}{u_n} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

En particulier,

$$\lim \frac{\alpha_n}{u_n} = 0 \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\alpha_n}{u_n} = \infty,$$

suivant que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Ceci nous explique pourquoi il est avantageux de transformer les séries de manière que, dans les transformées obtenues, le rapport d'un terme au terme précédent ait zéro pour limite. Alors les nouveaux termes finissent par décroître très rapidement, et les erreurs, commises en s'arrêtant à un terme quelconque, décroissent avec une rapidité *infiniment* plus grande. Si, au contraire, $\lambda = 1$, les termes finissent par décroître très lentement, et les erreurs commises décroissent avec une lenteur *infiniment* plus grande.

---

[1] *Voir* les *Rendiconti* des *Lincei*; 1888.

Cela étant, considérons la *série de Lambert*

$$(2)\qquad U = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \ldots.$$

C'est une série convergente, à termes positifs, si $0 < q < 1$. Le rapport d'un terme au terme précédent tend vers q : la série ne converge donc pas assez rapidement. Pour les valeurs de q, très voisines de l'unité, Schlömilch a fait connaître ([1]) une transformée intéressante : c'est une série *semi-convergente* de seconde espèce ([2]). La série de Schlömilch a donc le défaut de ne pas être convergente et, de plus, d'avoir tous les termes de même signe. Ce dernier défaut se rencontre encore dans la *transformée de Clausen* ([3])

$$(3)\qquad U = \frac{1+q}{1-q}q + \frac{1+q^2}{1-q^2}q^4 + \frac{1+q^3}{1-q^3}q^9 + \ldots;$$

mais celle-ci possède le caractère de rapide convergence indiqué plus haut, puisque la limite du rapport d'un terme au terme précédent est

$$\lim \frac{1-q^n}{1+q^n}\,\frac{1+q^{n+1}}{1-q^{n+1}}\,q^{2n+1} = 0.$$

Enfin, nous avons fait connaître ([4]) une transformation assez avantageuse, à savoir

$$(4)\qquad U = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1u_2}{1-q^2} + \frac{u_1u_2u_3}{1-q^3} - \ldots,$$

u_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme de la série proposée. Lors même

---

([1]) *Journal de Liouville*, p. 101; 1863.

([2]) *Voir* l'importante *thèse* de M. Stieltjes : *Sur quelques séries semi-convergentes*. Paris, 1886.

([3]) *Journal de Crelle*, IIIe Cahier, p. 94.

([4]) *Mathesis*, p. 126; 1886.

qu'on prendrait tous les termes positivement, la limite du rapport d'un terme au terme précédent serait

$$\lim \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q^{n}} u_n = 0.$$

La série (4) est donc *absolument* et *rapidement* convergente : elle présente, en outre, le précieux avantage d'être à termes alternativement positifs et négatifs, ce qui permet d'assigner, à chaque instant, des limites de l'erreur commise.

La transformation de Clausen prend sa source dans l'identité

$$(5) \qquad \sum_{i,j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{i=n} \left[a_{i,i} + \sum_{j=i+1}^{j=n} (a_{i,j} + a_{j,i}) \right].$$

En particulier, la somme

$$\sum_{i,j}^{\infty} a^i b^j q^{ij} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{ab^i q^i}{1 - aq^i} = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{ba^i q^i}{1 - bq^i}$$

se transforme en

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(\frac{1 + aq^i}{1 - aq^i} + \frac{1 + bq^i}{1 - bq^i} \right) a^i b^i q^{i^2}.$$

Il suffit de faire $a = b = 1$ pour obtenir la transformation de Clausen. Disons, en passant, que l'identité (5) donne lieu à une foule d'autres transformations, plus ou moins intéressantes. Par exemple, si on l'applique à la série elliptique

$$Q(q, x) = 1 + 2qx + 2q^4x^2 + 2q^9x^3 + \ldots,$$

on trouve

$$\begin{aligned} &x Q(q, x) + x^2 Q(q^4, x) + x^3 Q(q^9, x) + \ldots \\ &= \frac{x}{1 - x} + 2[q x^2 Q(q, q^2 x) + q^{16} x^4 Q(q^4, q^{16} x) \\ &\qquad + q^{81} x^6 Q(q^9, q^{54} x) + \ldots]. \end{aligned}$$

Du reste, il n'est pas difficile d'étendre l'identité (5) au cas de quantités à plusieurs indices. Ainsi, pour trois indices dont l'ordre est indifférent, on peut écrire

$$\sum_{i,j,k}^{n} a_{i,j,k} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,i,i} + 3\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=i+1}^{j=n}(a_{i,i,j}+a_{i,j,j}) + 6\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=i+1}^{j=n}\sum_{k=j+1}^{k=n} a_{i,j,k}.$$

Soient respectivement α_n, β_n, γ_n les restes de la série de Lambert et de ses transformées (3) et (4). Nous avons démontré, dans un de nos précédents articles ([1]), la formule

$$\alpha_n = \frac{1+q}{1-q}\log\sqrt{\frac{1+q}{1+q-2q^{n+1}}} + \frac{\theta}{6}q^{n+1}u_n,$$

θ étant une fraction proprement dite; mais nous voulons donner ici une nouvelle expression de α_n, exempte de tout calcul logarithmique. Rappelons, dans ce but, que la transformation (4) est un cas particulier de la relation

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots \\ & \quad = \frac{qx}{(1-qx)(1-q)} + \frac{q^3x^2}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^2)} \\ & \quad + \frac{q^6x^3}{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)(1-q^3)} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

qu'on déduit, à son tour, d'une remarquable formule de Cauchy ([2]). Du reste, le premier membre peut également prendre la forme

$$\frac{qx}{1-qx} + \frac{q^2x}{1-q^2x} + \frac{q^3x}{1-q^3x} + \ldots,$$

([1]) *Nouvelles Annales*, p. 106; 1886.

([2]) *Comptes rendus*, t. XVII, p. 530.

et, par suite, il devient égal à α_n pour $x = q^n$. Dès lors, la formule (6) donne

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{1-q} - \frac{u_{n+1}u_{n+2}}{1-q^2} + \frac{u_{n+1}u_{n+2}u_{n+3}}{1-q^3} - \ldots.$$

Donc, si q est suffisamment petit,

$$\alpha_n < \frac{u_{n+1}}{1-q} < q^n.$$

Pour calculer β_n, appliquons l'identité (5) au cas de $a_{i,j} = q^{ij}$. On trouve que les expressions

$$\frac{1-q^n}{1-q}q + \frac{1-q^{2n}}{1-q^2}q^2 + \frac{1-q^{3n}}{1-q^3}q^3 + \ldots + \frac{1-q^{n^2}}{1-q^n}q^n,$$

$$\frac{1+q-2q^n}{1-q}q + \frac{1+q^2-2q^{2(n-1)}}{1-q^2}q^4 + \ldots + \frac{1+q^n-2q^n}{1-q^n}q^{n^2}$$

sont identiques. Il en résulte

$$\sum_1^n \frac{1+q^i}{1-q^i}q^{i^2} - \sum_1^n \frac{q^i}{1-q^i} = \frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{2n+2}}{1-q^2} + \ldots + \frac{q^{n^2+n}}{1-q^n}.$$

Sous une autre forme,

$$\alpha_n - \beta_n = q^n u_1 + q^{2n} u_2 + q^{3n} u_3 + \ldots + q^{n^2} u_n,$$

d'où

$$\beta_n = q^{n(n+1)} u_{n+1} + q^{n(n+2)} u_{n+2} + q^{n(n+3)} u_{n+3} + \ldots.$$

On en déduit, à cause de $u_{i+j} < q^i u_j$,

$$\beta_n < q^{n(n+2)} u_1 + q^{n(n+3)} u_2 + \ldots = q^{n(n+1)} \alpha_n;$$

puis

$$\beta_n < q^{n(n+1)} \alpha_n < q^{n(n+2)},$$

ce qui confirme la supériorité de la série de Clausen sur celle de Lambert. Enfin, il est clair que

$$\gamma_n = \frac{u_1 u_2 \ldots u_{n+1}}{1-q^{n+1}} - \theta \frac{u_1 u_2 \ldots u_{n+2}}{1-q^{n+2}};$$

puis

$$\gamma_n < \frac{u_1 u_2 \ldots u_n u_{2n+1}^2}{q^{n-1}} < \frac{q^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{(1-q)^{n+2}} < q^{\frac{n(n+3)}{2}},$$

pourvu que $n+2$ ne surpasse pas le rapport des logarithmes de q et $1-q$. Soit, par exemple, $q = \frac{1}{10}$, de sorte que

$$\text{U} = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \ldots = 0,1223242434 26\ldots.$$

En employant la série (2), on ne peut compter que sur n décimales exactes, tandis que la série (3) nous en donne $n(n+2)$. Quant à la série (4), elle nous fournit $\frac{n(n+3)}{2}$ décimales exactes, si n est inférieur à 20. Le *dernier* chiffre serait inexact si n surpassait 19, sans surpasser 42, etc. Ainsi, par exemple, avec les *cinq* premiers termes de la série de Clausen, ou les *sept* premiers termes de (4), on obtient *trente-cinq* décimales exactes. Pour avoir la même approximation avec la série de Lambert, il faudrait prendre 35 termes; mais, avec un pareil nombre de termes, la série (4) nous donnerait 664 décimales exactes, et la série de Clausen nous permettrait de pousser les calculs jusqu'à la 1295e décimale, inclusivement.

Il est évident que α_n surpasse q^{n+1}. En outre, si l'on observe que u_n surpasse q^n, on peut écrire

$$\beta_n > q^{(n+1)^2} + q^{(n+1)(n+2)} + \ldots > q^{n(n+2)+1}.$$

On voit donc que les approximations signalées précédemment sont les plus grandes qu'on puisse obtenir dans chaque cas. Ainsi, pour $q = \frac{1}{10}$, on ne doit pas espérer que l'emploi des n premiers termes de la série de

Lambert ou de la série de Clausen conduise à plus de n ou $n(n+2)$ chiffres exacts.

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE DE WARING;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA,
Professeur à l'École Polytechnique de Porto.

Dans un intéressant article intitulé : *Sur certaines fonctions symétriques; application au calcul de la somme des puissances semblables des racines d'une équation* [1], M. M. d'Ocagne calcule, au moyen de la théorie des fonctions symétriques, la fonction

$$\frac{1}{(x-x_1)^n}+\frac{1}{(x-x_2)^n}+\ldots+\frac{1}{(x-x_p)^n},$$

où $x_1, x_2, \ldots$ représentent les racines de l'équation

$$U = A_0x^p + A_1x^{p-1}+\ldots+A_{p-1}x+A_p = 0;$$

et ensuite déduit, du résultat auquel il arrive, une formule pour le calcul de la somme des puissances semblables des racines de cette équation, analogue à celle de Waring. Il part de l'identité

$$D_x \log U = \sum \frac{1}{x-x_\omega}$$

qui, étant dérivée $n-1$ fois par rapport à x, donne

$$\sum \frac{1}{(x-x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_x^n \log U.$$

Le but de cette Note est de faire voir qu'on peut, par

---

[1] *Jornal de Sciencias mathematicas* (Coïmbra), t. VII, p. 133.

la méthode de M. M. d'Ocagne, obtenir la formule de Waring en faisant usage pour le calcul de $D_x^n \log U$ d'une formule différente de celle qu'il a employée, à savoir [1]

$$y^{(n)} = \sum \frac{n! \frac{d^i y}{du^i} (u')^\alpha (u'')^\beta \ldots (u^{(n)})^\lambda}{\alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (n!)^\lambda},$$

où $\sum$ représente une somme qui se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

En effet, cette formule donne

$$D_x^n \log U = \sum (-1)^{i-1} \frac{n!(i-1)! U^{-i} U'^\alpha U''^\beta \ldots U^{(p)}}{\alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (p!)^\lambda},$$
$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$
$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda,$$

parce que

$$U^{(p+1)} = U^{(p+2)} = \ldots = U^{(n)} = 0.$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = (-1)^n n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! U^{-i} U'^\alpha U''^\beta \ldots (U^{(p)})^\lambda}{\alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta \ldots (p!)^\lambda}$$

et, en posant $x = 0$,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^i} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! U_0^{-i} U_0'^\alpha \ldots U_0^{(p)\lambda}}{\alpha! \beta! \ldots \lambda! (2!)^\beta (3!)^\gamma \ldots (p!)^\lambda}$$

ou

$$\sum \frac{1}{x_\omega^i} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! A_p^{-i} A_{p-1}^\alpha A_{p-2}^\beta \ldots A_0^\lambda}{a! \beta! \ldots \lambda!}.$$

---

[1] *Voir* le *Calcul différentiel* de M. J. Bertrand, p. 308, ou mon *Curso de Analyse infinitesimal*, p. 184.

En appliquant maintenant cette formule à l'équation

$$A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0,$$

dont les racines sont inverses des racines de l'équation proposée, on trouve la formule de Waring

$$\sum x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)!\, A_0^{-i} A_1^\alpha A_2^\beta \ldots A_p^\lambda}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!},$$

où α, β, ..., λ sont les solutions entières positives de l'équation

$$\alpha + 2\beta + \ldots + p\lambda = n,$$

et où

$$i = \alpha + \beta + \ldots + \lambda.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1888;

Par M. M. ROUX,

Élève de l'École Polytechnique.

Pour simplifier les figures, nous traiterons le problème dans le cas où les axes sont rectangulaires; pour obtenir les résultats dans le cas général, il nous suffira de projeter sur un plan quelconque.

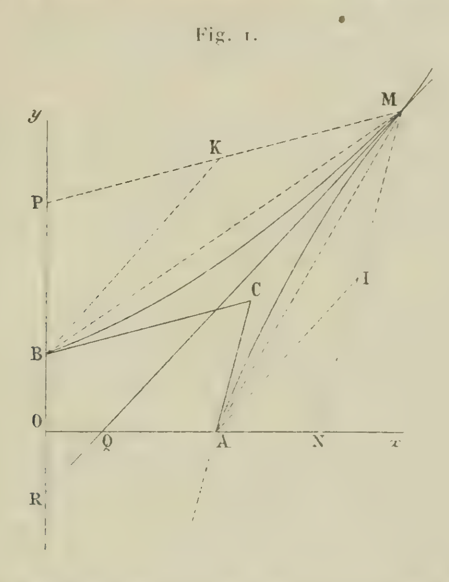
Première Partie.

Soient (*fig.* 1) deux paraboles tangentes au point M, MQR la tangente commune à ces deux paraboles; par le point M menons une parallèle MN à AC : elle rencontre Ox en un point N, et, d'après une propriété bien connue de la parabole, les deux segments QA et AN sont

égaux. La droite joignant le point A au point I, milieu du segment MN, est donc parallèle à MQR.

Si par M nous menons MP parallèle à BC, la droite joignant le point B au milieu K de PM sera de même

Fig. 1.



parallèle à MQR, et par suite les deux droites AI et BK sont parallèles.

Étant donnée la direction de la tangente commune aux deux paraboles, la construction du point de contact correspondant se fera de la manière suivante. Menons AI parallèle à cette direction et construisons la droite AM, conjuguée harmonique de Ax par rapport aux deux droites AI et AC. Construisons de la même manière la droite BM, conjuguée harmonique de By par rapport à BK et BC : le point de rencontre M des deux droites BM et AM est le point cherché.

Inversement, étant donnée la direction AM, on construira la direction AI et par suite les droites BK et BM.

On voit qu'à une droite AM correspond une direction unique de la droite AI et une seule droite BM, et, réciproquement, à une droite BM correspond une seule droite AM.

Les droites AM et BM sont donc deux rayons de faisceaux homographiques dont les points fixes sont les points A et B.

Détermination de cette conique. — La conique passe par les deux points fixes A et B : pour déterminer la tangente au point B, par exemple, il nous suffira de faire tourner le rayon AM jusqu'à ce qu'il coïncide avec AB et de chercher la position correspondante de BM.

Points sur Oy. — Nous avons déjà un premier point B situé sur Oy. Pour obtenir le second point, nous considérerons la parabole (B), infiniment aplatie sur Oy, et nous construirons une parabole (A) tangente à cette droite. En désignant par E le point de rencontre de AC et de Oy, le point de contact cherché F est tel que $OF = 2OE$.

On déterminera de la même façon le second point situé sur Ox.

Points sur AC. — Le second point D situé sur AC s'obtiendra en considérant la parabole (A) infiniment aplatie sur AC et en menant une parabole (B) tangente à cette droite. On voit facilement que ce point D est tel que les projections de BC et de CD sur Ox sont égales.

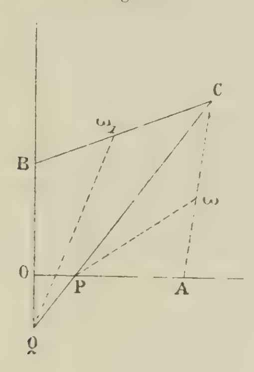
On déterminera de la même façon le second point situé sur BC.

Deuxième Partie.

Asymptotes et genre de la conique. — Pour déterminer les asymptotes de la conique, nous devons chercher les droites AM et BM parallèles, puisque leur point

d'intersection sera rejeté à l'infini. Soit CPQ la direction commune des deux droites AM et BM (*fig.* 2). En joignant le point P au point ω, milieu de AC, et le point Q au point ω_1, milieu de BC, nous obtenons deux

Fig. 2.



droites ωP et ω_1Q qui sont parallèles à la tangente commune aux deux paraboles. Le problème consiste donc à mener, par les deux points ω et ω_1, deux droites parallèles ωP et ω_1Q, telles que la droite PQ passe par le point C, ou à mener par le point C des tangentes à la courbe enveloppe des droites PQ.

Or l'enveloppe des droites PQ est une hyperbole dont nous connaissons l'équation. En désignant par

$$x_0 = \frac{a+x}{2}, \qquad y_0 = \frac{y}{2}, \qquad x_1 = \frac{x}{2}, \qquad y_1 = \frac{b+y}{2}$$

les coordonnées de ω et de ω_1, cette équation est

$$(\mathrm{Y}x_1 + \mathrm{X}y_0 - x_1 y_0 - x_0 y_1)^2 = 4(x_0 x_1 - \mathrm{X}x_0)(y_0 y_1 - \mathrm{Y}y_1).$$

Nous exprimerons que la conique est une hyperbole en exprimant que le point $\mathrm{C}(x, y)$ est dans la même

région, par rapport à cette hyperbole, que le centre. Cette condition est

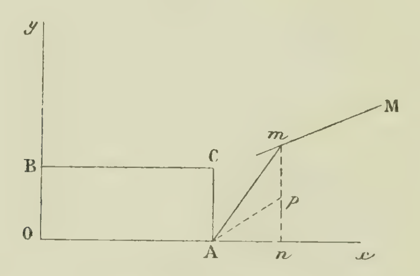
$$(ay + bx - ab)(8xy + ay + bx - ab) > 0.$$

Troisième Partie.

On peut prévoir que, dans le cas particulier où les droites AC et BC sont parallèles aux axes, la tangente commune passe par un point fixe.

Cherchons combien, d'un point donné M, on peut mener de droites MPQ, telles que les paraboles (A) et (B) soient tangentes à cette droite au même point. Soit m le point de contact des deux paraboles (*fig.* 3). Les quatre directions Ax, AC, Am et Ap parallèle

Fig. 3.



à mM sont conjuguées harmoniques; à une direction mM correspond une seule direction Am, et réciproquement. Si la droite Mm varie, le lieu du point m est le lieu d'intersection de deux rayons de faisceaux homographiques ayant pour points fixes les points M et A. Ce lieu est donc une conique. On voit facilement que cette conique est une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles à Ox et à Oy. En agissant de même pour le point B, on obtient une seconde hyperbole

ayant mêmes directions asymptotiques et passant par les points M et B. Les droites joignant le point M aux points d'intersection de ces deux hyperboles sont les tangentes cherchées.

Ces deux coniques ayant trois points communs, deux à l'infini dans les directions (Ox, Oy) et un en M, se coupent en un seul point.

L'enveloppe des tangentes communes, étant une courbe telle que d'un point on ne peut lui mener qu'une seule tangente, est un point. Les tangentes communes passent donc toutes par un point fixe.

Prenons comme direction de la tangente commune la droite OC : la construction de la première partie donne, pour le point de contact, un point de OC. Lorsque ce point de contact est confondu avec le point G, centre de gravité du triangle ABC, la même construction indique que les deux paraboles ont, en ce point, une même tangente parallèle à AB. Le point G est donc le point fixe cherché.

Autre démonstration.

Soient MP la tangente qui rencontre BC en I (*fig.* 4), et N le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur Ox. On a

$$BI = \frac{ON}{2}$$

et

$$PA = AN,$$

d'où

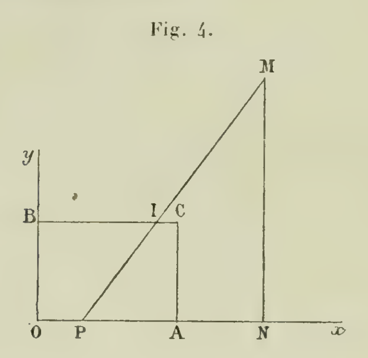
$$CI = OA - \frac{ON}{2}$$

et

$$OP = 2\left(OA - \frac{ON}{2}\right);$$

donc $CI = \frac{OP}{2}$ et la droite MP passe par le centre de gravité G du triangle ABC.

Fig. 4.



Quatrième Partie.

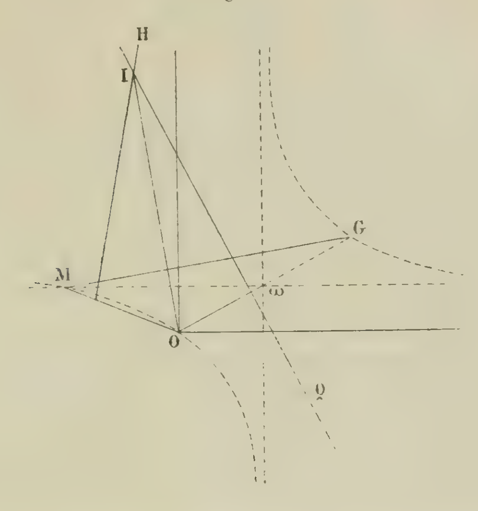
Transformons par polaires réciproques, en prenant comme conique fixe un cercle ayant son centre en O. Les deux paraboles se transforment en deux coniques passant par l'origine et ayant pour axes des parallèles à Ox et à Oy. Elles sont tangentes en un point I (*fig.* 5), qui est situé sur la polaire du point G par rapport au cercle. Elles se coupent en un quatrième point H, qui est le pôle de la seconde tangente commune aux deux paraboles. La droite IH est la polaire du point d'intersection de ces deux tangentes.

Or les deux coniques ayant leurs axes parallèles, leurs droites d'intersection sont également inclinées sur les axes : IH et IO sont donc également inclinées sur Oy.

Revenons à la première figure. Le point I se transforme en une droite passant par G et perpendiculaire à OI, la droite IH en un point M sur GM et sur la perpendiculaire abaissée de O sur IH.

Les deux droites GM et OM sont deux rayons de faisceaux homographiques, et le lieu de leur intersec-

Fig. 5.



tion est une hyperbole ayant pour centre le milieu de OG, passant par O et ayant pour asymptotes des parallèles à Ox et à Oy.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1888;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées

rectangulaires par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} z = 0, \\ x = a(v - \sin v), \\ y = a(1 - \cos v). \end{cases}$$

Indiquer la forme de la surface : montrer que le plan des xy est un plan de symétrie, et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface.

Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré.

Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Démontrer qu'un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe coupe la surface suivant une ligne de courbure.

Première méthode.

Les cosinus directeurs de la normale en un point d'une surface peuvent être représentés, en supposant les axes rectangulaires, par les nombres

$$\sin\theta\cos\alpha, \quad \sin\theta\sin\alpha, \quad \cos\theta.$$

Nous poserons

$$(2) \qquad \begin{cases} \tang\frac{1}{2}\theta = e^{\beta}, \\ \alpha_1 - \alpha + i\beta, \qquad \beta_1 = \alpha - i\beta. \end{cases}$$

Au moyen de ces variables, dont le choix a été indiqué par M. O. Bonnet, les coordonnées d'un point quelconque d'une surface minima peuvent être repré-

sentées par les formules suivantes ([1]) :

$$(3)\quad \begin{cases} z = f(\alpha_1) + f_1(\beta_1), \\ x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int f_1'(\alpha_1)(e^{-i\alpha_1} - e^{i\alpha_1})\,d\alpha_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int f_1'(\beta_1)(e^{i\beta_1} - e^{-i\beta_1})\,d\beta_1, \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int f_1'(\alpha_1)(e^{i\alpha_1} + e^{-i\alpha_1})\,d\alpha_1 - \dfrac{i}{2}\displaystyle\int f_1'(\beta_1)(e^{i\beta_1} + e^{-i\beta_1})\,d\beta_1. \end{cases}$$

La cycloïde donnée devant être une ligne géodésique de la surface minima cherchée, en tout point de cette cycloïde la normale sera la normale à la surface au même point, et, réciproquement, si la surface contient la cycloïde et si en chacun des points de la cycloïde la normale à la surface est dans le plan de la cycloïde, cette dernière sera une ligne géodésique, et aussi une ligne de courbure. En tous les points de la cycloïde, on devra donc avoir $\theta = 90°$, c'est-à-dire $\beta = 0$, et par suite $\beta_1 = \alpha_1$.

Pour déterminer les deux fonctions inconnues f et f_1, nous écrirons : 1° que $z = 0$, et 2° que les éléments linéaires de la cycloïde et de la surface sont égaux lorsque $\beta_1 = \alpha_1$, quelle que soit la valeur de α_1.

La normale au point (v) de la cycloïde fait avec l'axe des x un angle égal à $\pi - \frac{1}{2}v$ (en supposant $a > 0$) ; la normale à la surface au même point faisant avec l'axe des x un angle égal à α, on doit avoir, puisque $\alpha = \alpha_1$ et que ces deux normales doivent coïncider,

$$\alpha_1 = \pi - \tfrac{1}{2}v.$$

Si $d\sigma$ représente la différentielle de l'arc de la cycloïde, on a

$$d\sigma^2 = 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}v\, dv^2 = 16a^2 \sin^2 \alpha_1\, d\alpha_1^2 ;$$

([1]) B. Niewenglowski, *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné* (*Annales de l'École Normale;* 1880. Paris, Gauthier-Villars).

d'autre part, l'élément linéaire ds de la surface est, comme on le reconnaît aisément, donné par la formule

$$ds^2 = 4\cos^2\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} f'(\alpha_1) f'_1(\beta_1)\, d\alpha_1\, d\beta_1.$$

On doit donc avoir, si $\beta_1 = \alpha_1$,

$$(4) \qquad f(\alpha_1) + f_1(\alpha_1) = 0,$$

d'où

$$(5) \qquad f'_1(\alpha_1) = -f'(\alpha_1).$$

ce qui exprime que $z = 0$, et

$$f'^2(\alpha_1) = -4a^2 \sin^2\alpha_1,$$

pour exprimer, en tenant compte de l'équation (5), que $ds^2 = d\sigma^2$.

On tire de la dernière équation

$$f'(\alpha_1) = 2\varepsilon a i \sin\alpha_1 \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et par suite

$$f(\alpha_1) = -2\varepsilon a i \cos\alpha_1.$$

Il est, on le voit immédiatement, inutile d'ajouter une constante.

De ce qui précède on tire

$$f_1(\alpha_1) = 2\varepsilon a i \cos\alpha_1$$

ou, ce qui revient au même,

$$f_1(\beta_1) = 2\varepsilon a i \cos\beta_1.$$

Les fonctions f et f_1 étant connues, substituons leurs expressions dans les formules (3). En remplaçant la variable α par $\pi - \frac{1}{2}\nu$, on trouve sans difficulté

$$z = -4a\varepsilon i \sin\tfrac{1}{2}\nu \sin i\beta + \text{const.},$$

$$x = -a\varepsilon(\nu - \sin\nu\cos 2i\beta) + \text{const.},$$

$$y = -a\varepsilon(1 - \cos\nu\cos 2i\beta) + \text{const.};$$

en prenant $\varepsilon = -1$ et remplaçant les constantes arbitraires par zéro, on obtient

$$(6)\qquad \begin{cases} z = 4a \sin\frac{1}{2}v \sin i\beta, \\ x = a(v - \sin v \cos 2i\beta), \\ y = a(1 - \cos v \cos 2i\beta). \end{cases}$$

En donnant à v et β des valeurs réelles, on aura une surface réelle répondant à la question.

Seconde méthode.

Nous suivrons exactement la même marche, mais en employant d'autres variables.

Une surface minima est définie, en coordonnées rectangulaires, par les formules [1]

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1 - u^2)\,F(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1 - u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1, \\ y = \frac{i}{2}\int(1 + u^2)\,F(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1 + u_1^2)\,F_1(u_1)\,du_1, \\ z = \int u\,F(u)\,du + \int u_1\,F_1(u_1)\,du_1. \end{cases}$$

La normale au point (u, u_1) fait, avec l'axe des z, un angle ayant pour cosinus $\dfrac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}$.

Pour tous les points de la cycloïde, on doit donc avoir

$$u_1 = \frac{1}{u}, \qquad z = 0,$$

ce qui donne

$$(8)\qquad F_1\left(\frac{1}{u}\right) = u^4\,F(u).$$

Posons $u = \rho e^{\frac{1}{2}ti}$, $u_1 = \rho e^{-\frac{1}{2}ti}$. Pour tous les points

[1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, p. 289. Paris, Gauthier-Villars.

de la cycloïde on doit avoir $uu_1 = 1$, donc $\rho = 1$. Les cosinus directeurs de la normale à la surface, ayant pour expressions, en un point (u, u_1),

$$\frac{u_1 + u}{uu_1 + 1}, \quad \frac{i(u_1 - u)}{uu_1 + 1}, \quad \frac{uu_1 - 1}{uu_1 + 1}.$$

Ces valeurs deviennent

$$\cos\frac{t}{2}, \quad \sin\frac{t}{2}, \quad 0.$$

Or, au point (v) de la cycloïde, les cosinus directeurs de la normale à la courbe ont pour valeurs

$$\cos\frac{v}{2}, \quad -\sin\frac{v}{2}, \quad 0.$$

Donc, en posant $t = -v$, la normale à la surface au point $\left(e^{-\frac{vi}{2}}, e^{\frac{vi}{2}}\right)$ coïncidera avec la normale au point (v) de la cycloïde, pourvu que la condition (8) soit remplie.

En désignant, comme plus haut, par ds et $d\sigma$ les éléments linéaires de la surface et de la cycloïde, on a

$$d\sigma^2 = 4a^2\frac{(1-u^2)^2}{u^4}\,du^2,$$

$$ds^2 = (1 + uu_1)^2\,F(u)\,F_1(u_1)\,du\,du_1\,;$$

cette dernière formule devient, en supposant $uu_1 = 1$ et tenant compte de l'équation (8),

$$ds^2 = 4u^2\,F^2(u)\,du^2.$$

On doit donc vérifier l'équation

$$4a^2\frac{(1-u^2)^2}{u^4}\,du^2 = 4u^2\,F^2(u)\,du^2,$$

ce qui donne

$$F(u) = \varepsilon ai\frac{1-u^2}{u^3},$$

par suite (8),

$$F_1\left(\frac{1}{u}\right) = \varepsilon aiu(1 - u^2),$$

donc

$$F_1(u_1) = -\varepsilon ai\frac{1 - u_1^2}{u_1^3}.$$

En remplaçant $F(u)$ et $F_1(u_1)$ par ces expressions dans les formules (7), intégrant et posant, afin que u et u_1 soient imaginaires conjuguées,

$$u = \rho e^{-vi}, \qquad u_1 = \rho e^{vi},$$

puis, prenant $\varepsilon = -1$ et déterminant convenablement les constantes arbitraires, on trouve sans difficulté

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= a\left[v - \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\sin v\right], \\ y &= a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos v\right], \\ z &= 2a\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\frac{1}{2}v. \end{aligned} \right.$$

Ces formules coïncident avec les formules (6), si l'on pose $\rho = e^{\beta}$. Si l'on donne à ρ la valeur particulière 1, on obtient les formules (1), représentant la cycloïde donnée.

Forme de la surface. — Si l'on remplace v par $v + 2k\pi$ et ρ par $(-1)^k\rho$, les expressions de y et z ne changent pas; x augmente de $2k\pi a$. La surface est donc *périodique,* elle se compose d'une infinité de nappes identiques à celle qu'on obtient en faisant varier v de 0 à 2π.

Si l'on change ρ en $-\rho$, z change de signe sans changer de valeur absolue, x et y gardent leurs valeurs; si l'on change v en $-v$, y conserve sa valeur, mais x et z changent de signes en gardant les mêmes valeurs absolues; enfin, si l'on change v en $2\pi - v$, y et z res-

tent invariables, x se change en $2\pi a - x$; il résulte de là : 1° que le plan des xy est un plan de symétrie (ce qui est d'ailleurs évident *a priori*); 2° que la tangente en un point de rebroussement de la cycloïde est un axe de symétrie; enfin 3° que tout plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et mené à égale distance de deux rebroussements consécutifs est un plan de symétrie.

Courbes $v =$ const. — Supposons que l'on donne à v une valeur constante déterminée v_0, et cherchons les points correspondants de la surface. On a pour ces points (9)

$$(10) \qquad \frac{x - av_0}{\sin v_0} = \frac{y - a}{\cos v_0}:$$

donc tous ces points sont dans un plan perpendiculaire au plan de la cycloïde. Considérons le cercle générateur de la cycloïde; quand $v = v_0$, le centre de ce cercle, qui roule sans glisser sur l'axe des x, est venu occuper une position déterminée ω, à laquelle correspond un point M de la cycloïde; l'équation (10) montre que la trace du plan de la courbe $v = v_0$ est précisément dirigée suivant le rayon ωM. On trouve, par un calcul très simple, que la section de la surface par le plan mené par la droite ωM, et perpendiculaire au plan des xy, est une parabole du second degré, ayant pour sommet le point M, et pour axe la droite ωM, la concavité de cette parabole étant dirigée de ω vers M; enfin le paramètre de cette parabole a pour valeur $4a\sin^2\frac{1}{2}v_0$. Si l'on fait varier v de 0 à π, le paramètre va en croissant depuis 0 jusqu'à $4a$ et reprend les mêmes valeurs en sens inverse quand v varie de π à 2π. Pour $v = 0$, la parabole est infiniment aplatie et se réduit à la partie *négative* de l'axe des y, de sorte que la surface contient une infinité de *demi-droites* tangentes à la cycloïde en ses points de

rebroussement. La surface peut donc être engendrée par la parabole mobile que nous venons de définir, et ce mode de génération indique nettement sa forme.

Courbes $\rho =$ const. — Ces courbes se projettent sur le plan des xy suivant des cycloïdes allongés et sur le plan des yz suivant des paraboles. Nous savons déjà que la cycloïde donnée est la courbe $\rho = 1$.

Équation différentielle des lignes de courbure. — Les lignes de courbure d'une surface minima sont définies par l'équation différentielle

$$(11) \qquad F(u)\,du^2 - F_1(u_1)\,du_1^2 = 0.$$

Si l'on exprime que la surface a une ligne de courbure plane, dont le plan est parallèle au plan des xy, cette équation devra être vérifiée quand $u_1 = \frac{1}{u}$. En introduisant cette hypothèse dans l'équation (11), on obtient

$$F_1\left(\frac{1}{u}\right) = u^4 F(u):$$

c'est l'équation (8).

Remplaçons $F(u)$ et $F_1(u_1)$ par leurs expressions trouvées plus haut : l'équation (11) devient par cette substitution

$$(12) \qquad \frac{1-u^2}{u^3}\,du^2 + \frac{1-u_1^2}{u_1^3}\,du_1^2 = 0.$$

Si l'on suppose $v = \pi$, et par suite $u = -i\rho$, $u_1 = i\rho$, ce qui donne

$$du^2 = du_1^2$$

et

$$\frac{1-u^2}{u^3} = \frac{1+\rho^2}{i\rho^3}, \qquad \frac{1-u_1^2}{u_1^3} = \frac{1+\rho^2}{-i\rho^3},$$

l'équation précédente est vérifiée ; donc le plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de

deux rebroussements consécutifs coupe la surface suivant une ligne de courbure. Ce résultat est d'ailleurs évident *a priori*, puisque ce plan est un plan de symétrie. On voit encore que la section parabolique obtenue est une ligne géodésique, de sorte que la surface trouvée ne diffère pas de celle qui a été étudiée par M. E. Catalan, et qui admet pour ligne géodésique une parabole du second degré.

CORRESPONDANCE.

M. *J. Mouchel* nous communique les deux intéressants théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Lorsque, dans un déterminant de l'ordre n, on retranche chaque ligne ou chaque colonne de la somme de toutes les autres, on obtient un nouveau déterminant qui est égal au premier multiplié par*

$$(-1)^{n-1}2^{n-1}(n-2).$$

THÉORÈME II. — *Si, dans un déterminant de l'ordre n, on retranche, de chaque ligne ou de chaque colonne, la somme de toutes les autres, on obtient un nouveau déterminant qui est égal au déterminant primitif multiplié par*

$$-2^{n-1}(n-2).$$

QUESTION PROPOSÉE.

1583. On calcule une suite de fonctions, d'après la loi

$$u_{n+1} = \log \frac{e^{u_n} - 1}{u_n},$$

en supposant $u_1 = x$. Démontrer la formule

$$e^x - 1 = u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + \ldots.$$

(E. CESARO.)

REMARQUES SUR DIVERS ARTICLES, CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES;

PAR M. E. CESARO.

1. M. Mathyas Lerch a signalé des séries qui se prêtent à des considérations intéressantes. C'est spécialement la série dont le terme général est

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad (0 < q < 1 < x),$$

que M. Lerch a fait connaître dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. VII, p. 79. On a représenté par ν le *nombre des chiffres* de n. Le nombre $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, généralement égal à q, devient x^ν lorsque $n = 10^{\nu-1}$. Il en résulte que, si l'on fait parcourir à n la succession des puissances de 10, le rapport considéré finit par surpasser toute limite. Cependant *la série est convergente*, car $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $q < 1$. M. Lerch dit, en outre, que x doit être inférieur à $\frac{1}{q^2}$. Curieux de *savoir le pourquoi* de cette condition inutile, j'ai été conduit à penser que M. Lerch, voulant se borner à faire connaître quelque exemple particulier de séries construites avec une grande généralité, a involontairement échangé entre elles les conditions relatives à deux cas particuliers différents. Soit $f(n)$ une fonction telle que $f(n) - f(n-1)$ augmente avec n au delà de toute limite. Si $\mathfrak{I}(n)$ est la totalité des nombres entiers, non supérieurs à n, qui jouissent d'une propriété Ω, appartenant à une infinité de nombres entiers, la série dont

le terme général est

$$u_n = q^n x^{f[\mathfrak{I}(n)]} \qquad (0 < q < 1 < x)$$

est certainement convergente, si $\dfrac{f[\mathfrak{I}(n)]}{n}$ tend vers zéro, bien que le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des nombres entiers doués de la propriété Ω. La série est encore convergente lorsque $\dfrac{f[\mathfrak{I}(n)]}{n}$ tend vers une limite finie autre que zéro; mais, dans ce cas, x ne peut être aussi grand qu'on le veut. En particulier, la série, dont le terme général est

$$u_n = q^n x^{[\sqrt{n}]^2} \qquad \left(0 < q < 1 < x < \frac{1}{q}\right),$$

est convergente, bien que le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des *carrés parfaits*. C'est probablement cette série que M. Lerch avait en vue, ou plutôt la série qui a pour terme général

$$u_n = q^{n-[\sqrt{n}]} x^{\frac{1}{2}[\sqrt{n}]\{[\sqrt{n}]+1\}}.$$

Quoi qu'il en soit, il est certain que, si la propriété Ω cessait d'être *infiniment rare* parmi les nombres entiers, la série perdrait sa convergence.

2. J'ai donné dans le même *Journal*, vol. VII, p. 172, des exemples moins compliqués. Les voici :

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \cdots \qquad (1 < \alpha < \beta),$$

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \ldots \qquad (0 < \alpha < \beta < 1).$$

M. A. Gutzmer dit que ces exemples sont *moins remarquables* que celui de M. Lerch. Cette appréciation est inexacte. Voici pourquoi. Dans la série de M. Lerch,

les valeurs de n, qui font croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ au delà de toute limite, *deviennent de plus en plus rares*. Dans mes exemples, comme dans d'autres séries de M. Lerch, il est tout aussi probable de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tendre vers l'infini que vers zéro. C'est justement sur cette observation que M. Gutzmer s'appuie pour dire que la série de M. Lerch est la plus remarquable de toutes. Or il me semble que *la convergence d'une série est d'autant plus surprenante que les symptômes de divergence s'y manifestent plus fréquemment*. On devrait plutôt s'attacher à multiplier ces symptômes autant que possible, en s'efforçant d'obtenir, malgré cela, une série convergente. Il est certain qu'on peut construire des séries dans lesquelles $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite pour des valeurs de n, dont la fréquence parmi les nombres entiers est aussi considérable qu'on le veut. Il suffit de prendre la série

$$q_1 + q_2^2 + \ldots + q_r^r + q_1^{r+1} + q_2^{r+2} + \ldots + q_r^{2r} + q_1^{2r+1} + \ldots,$$

où

$$0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_r < 1.$$

Ici la convergence est manifeste. Cependant, la probabilité de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasser toute limite est $1 - \frac{1}{r}$: elle est aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Est-il possible de *construire des séries convergentes dans lesquelles les valeurs de n, qui ne font pas croître* $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ *à l'infini, soient infiniment rares?*

3. Dans le *Jornal de Sciencias*, vol. VIII, p. 33, M. Gutzmer a montré que les singularités de la série de M. Lerch peuvent être *enlevées* par un groupement convenable des termes. Ce fait est vrai pour toutes les

séries convergentes. J'ai établi cela en faisant voir, par des considérations analogues à celles dont on fait usage pour démontrer le *théorème de Riemann*, comment on doit s'y prendre pour *calquer*, pour ainsi dire, une série convergente sur une progression géométrique donnée. Mais M. Ed. Weyr, dans le même *Journal*, vol. VIII, p. 97, vient d'arriver au même résultat par des considérations beaucoup plus simples que les miennes. Je vais les reproduire en les modifiant quelque peu. Soit

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

une série convergente à termes positifs. Le rapport $\frac{S_n}{R_n}$ croît à l'infini avec n, et, par suite, on peut toujours assigner une valeur de n à partir de laquelle on ait constamment $q S_n > R_n$, q étant positif. Cela est encore vrai, si l'on considère la série à partir de l'un quelconque de ses termes. Il en résulte qu'on peut grouper les termes de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, en les laissant dans l'ordre où ils se trouvent, de manière à former une nouvelle série $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, dont les termes satisfont à l'inégalité $q v_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots$. On voit que $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ sera constamment inférieur au nombre positif q, arbitrairement petit. Plus généralement, ayant pris des nombres quelconques, positifs et finis, la remarque de M. Weyr conduit à affirmer qu'il existe une suite de nombre positifs $q_1, q_2, q_3, \ldots$ non supérieurs aux nombres donnés, et tels que l'on puisse écrire

$$v_n = \frac{S q_1 q_2 q_3 \ldots q_{n-1}}{(1+q_1)(1+q_2)\ldots(1+q_n)}.$$

Au moyen de cette égalité, nous pouvons faire en sorte que l'*allure* de la série donnée se modèle, autant que possible, sur celle d'une autre série.

4. On a reproduit dans le même *Journal*, vol. VIII, p. 116, quelques-unes de mes précédentes remarques (*Nouvelles Annales*, p. 50; 1880). A propos de l'une d'elles, je signalerai une généralisation assez intéressante. Si la fonction a_n croît sans cesse et indéfiniment, on sait, d'après Cauchy, que l'on a

$$\lim \frac{a_1 S_1 + (a_2 - a_1) S_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1}) S_n}{a_n} = S$$

ou bien

$$\lim \left(S_n - \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} \right) = S;$$

d'où

$$\lim \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} = 0.$$

D'autre part, en vertu du même théorème de Cauchy,

$$\lim \frac{a_1 u_1 + (a_2 - a_1) u_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1}) u_n}{a_n} = 0;$$

car $\lim u_n = 0$. Donc

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{a_n} = 0.$$

Voici une curieuse conséquence de cette égalité. Si la série $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ n'est pas *moins divergente* que la série harmonique, on peut substituer n au dénominateur a_n. Si l'on prend ensuite $a_n u_n = \pm 1$, on arrive à cette conclusion : *pour que la série*

$$\pm \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \frac{1}{a_3} \pm \ldots$$

soit convergente, il faut que les signes — s'y présentent aussi fréquemment que les signes +. Cela généralise une proposition énoncée précédemment (*Nouvelles Annales*, p. 57; 1888).

5. Il vient de paraître dans les *Nouvelles Annales*, p. 196, 1888, un théorème de convergence que son auteur, M. J.-L.-W.-V. Jensen, croit nouveau. On a l'habitude d'énoncer la première partie du *théorème de Kummer* comme il suit : *Soit a_n une fonction positive de n. La série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, à termes positifs, est convergente si $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ tend, pour n infini, vers une limite positive.* Cet énoncé a le défaut d'être plus restrictif que ne l'exige la démonstration; car, dans celle-ci, on commence par admettre l'existence d'une limite positive λ pour $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ dans le seul but d'en conclure que cette expression finit par surpasser tout nombre *positif* k inférieur à λ. M. Jensen a donc raison d'énoncer le théorème de Kummer comme il le fait, mais on ne saurait accorder à son article des *Nouvelles Annales* d'autre valeur que celle d'une utile remarque. Voici comment je démontre dans mon *Cours*, depuis deux ans, le théorème en question. L'inégalité

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1},$$

qui a lieu à partir d'une valeur de n, montre d'abord que la fonction *positive* $a_n u_n$ finit par décroître. Donc $a_n u_n$ admet une limite finie, et, par suite, la série

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \ldots$$

est *convergente*. La série donnée converge donc aussi, puisque ses termes, multipliés par la constante k, finissent par être inférieurs aux termes correspondants d'une série convergente *à termes positifs*. Quant à la seconde partie du théorème, j'observe que, si l'expression considérée devient négative à partir d'une certaine valeur de n, la fonction $a_n u_n$ croît au-dessus de quelque nombre positif k. Il en résulte que la série donnée est

divergente, puisque ses termes finissent par surpasser les termes correspondants de la série $\frac{k}{a_1}+\frac{k}{a_2}+\frac{k}{a_3}+\cdots$, *qu'on suppose divergente.*

SUR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX POLYNOMES ENTIERS;

Par M. Étienne POMEY.

Je me propose, dans ce travail, de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les polynômes entiers

$$f \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m.$$
$$g \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n.$$

m étant supérieur ou égal à n, aient un plus grand commun diviseur de degré p, et de former ce plus grand commun diviseur.

Lemme I. — *L'expression générale des polynômes entiers u, v satisfaisant à l'identité*

$$uf + vg \equiv 0 \tag{1}$$

est donnée par les formules

$$u = g_1 A, \tag{2}$$
$$v = -f_1 A, \tag{3}$$

où A désigne un polynôme entier quelconque et f_1 et g_1 les quotients de f et g par leur plus grand commun diviseur θ.

En effet, l'identité (1) peut s'écrire

$$uf_1\theta + vg_1\theta \equiv 0. \tag{4}$$

Si f et g sont premiers entre eux, on peut supposer $\theta = 1$, $f_1 \equiv f$, $g_1 \equiv g$. S'ils ne sont pas premiers entre eux, θ n'est pas identiquement nul. Dans les deux cas, on peut donc diviser l'identité (4) par θ, ce qui donne

$$(5) \qquad uf_1 + vg_1 \equiv 0.$$

On voit ainsi que g_1 divise uf_1; mais g_1 est premier avec f_1; donc il divise u, et l'on a

$$(2) \qquad u \equiv g_1 A,$$

A étant un polynôme entier. Alors l'identité (5) peut s'écrire

$$g_1 A f_1 + vg_1 \equiv 0$$

ou, puisque g_1 n'est pas identiquement nul,

$$(3) \qquad v \equiv -f_1 A.$$

Ainsi, pour que u et v puissent satisfaire à la relation (1), il faut qu'ils rentrent dans les formules (2) et (3); d'ailleurs les polynômes donnés par ces formules satisfont à l'identité (1), quel que soit le polynôme A. Le théorème est donc démontré.

Lemme II. — *Lorsque le plus grand commun diviseur θ de f et g est de degré p, il existe, quelle que soit la valeur de q, prise parmi les nombres* 1, 2, 3, ..., p, *deux polynômes u, v de degrés respectifs $n-q$, $m-q$, satisfaisant à l'identité $uf + vg \equiv 0$.*

En effet, θ étant, par hypothèse, de degré p, les polynômes f_1 et g_1, quotients de f et g divisés par θ, sont des degrés $n-p$ et $m-p$; alors, si dans les formules (2) et (3) du lemme I, qui définissent tous les couples de polynômes u, v satisfaisant à $uf + vg \equiv 0$, on prend pour A un polynôme arbitraire de degré $p-q$, en désignant par q l'un des nombres 1, 2, ..., p, les poly-

nômes u, v correspondants fournis par ces formules ont respectivement pour degrés $n-q$ et $m-q$.

Lemme III. — *Lorsque le plus grand commun diviseur θ de f et g est de degré p, il existe un couple de polynômes u, v respectivement de degré $n-p$ et $m-p$, satisfaisant à l'identité $uf+vg\equiv 0$. Il n'en existe qu'un seul, abstraction faite d'un facteur constant arbitraire.*

En effet, θ étant de degré p, f_1 et g_1 sont de degré $n-p$ et $m-p$. Alors, d'après les formules (2) et (3) du lemme I, tous les couples de polynômes u, v, de degré $n-p$ et $m-p$, satisfaisant à $uf+vg\equiv 0$, s'obtiendront en multipliant g_1 et $-f_1$ par une même constante A, arbitraire d'ailleurs.

Lemme IV. — *Lorsqu'il existe un couple de polynômes u, v, déterminés à un facteur constant arbitraire près, respectivement de degrés $n-p$ et $m-p$, tels que $uf+vg$ soit identiquement nul, le plus grand commun diviseur θ de f et g est de degré p.*

En effet, l'expression générale des polynômes u, v satisfaisant à l'identité $uf+vg\equiv 0$ est donnée par les formules (2) et (3) du lemme I. Pour que ces polynômes u, v soient déterminés, à un facteur arbitraire près, il faut que le polynôme A se réduise à une constante ; alors, pour que u et v aient pour degrés $n-p$ et $m-p$, il faut que g_1 et f_1 soient eux-mêmes de degrés $n-p$ et $m-p$; or ces derniers polynômes sont les quotients de g et f par θ ; il faut donc que θ soit de degré p.

Ces lemmes préliminaires établis, on peut rattacher les conditions d'existence d'un plus grand commun di-

viseur de degré p, soit au résultant d'Euler-Bézout-Sylvester, soit à celui de Bézout-Cauchy. C'est ce que je ferai successivement dans la première et dans la seconde Partie de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSULTANT D'EULER-BÉZOUT-SYLVESTER.

Notations. — Dans ce qui suit, nous désignerons par R_0 le déterminant suivant, d'ordre $m+n$

$$\begin{vmatrix}
 & & & & & b_0 & a_0 & & & & \\
 & & & & \cdot & b_1 & a_1 & a_0 & & & \\
 & & & \cdot & & \cdot & \cdot & a_1 & \cdot & & \\
 & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
 & b_0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & a_0 \\
b_0 & b_1 & & & & b_n & \cdot & \cdot & & & a_1 \\
b_1 & \cdot & & & \cdot & & a_m & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & & & a_m & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & b_n & & & & & & & & \cdot & \cdot \\
b_n & & & & & & & & & & a_m
\end{vmatrix},$$

dans lequel les m premières colonnes contiennent uniquement les coefficients de g, les n dernières uniquement les coefficients de f, et où l'on considère comme nuls tous les éléments non écrits situés en dehors des deux parallélogrammes recouverts par les a et par les b. Sauf une légère modification d'arrangement, ce déterminant est le résultant d'Euler-Bézout-Sylvester relatif aux polynômes f et g.

Nous désignerons par R_i le déterminant qui se déduit de R_0 par la suppression des i rangées quadrangulaires extrêmes, c'est-à-dire par la suppression des i premières

et des i dernières lignes, ainsi que des i premières et des i dernières colonnes.

Nous appellerons R_{ij} le déterminant obtenu au moyen de R_i en substituant à sa première ligne les éléments correspondants de la $j^{\text{ième}}$ ligne de R_0.

En désignant par q l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., $p+1$ et posant

$$u \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-q}\, x^{n-q},$$
$$v \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_{m-q} x^{m-q},$$

nous appellerons S_q le système d'équations obtenu en égalant à zéro les coefficients du polynôme $uf + vg$, ce sytème étant écrit sous la forme spéciale suivante :

$$\begin{array}{llr}
 & b_0\beta_0 + a_0\,\alpha_0 & = 0, \\
 & b_0\beta_1 + b_1\beta_0 + a_1\,\alpha_0 - a_0\alpha_1 & = 0, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & \ldots + b_{n-1}\beta_1 + b_n\beta_0 + a_n\,\alpha_0 + a_{n-1}\,\alpha_1 + \ldots & = 0, \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 \ldots + b_n\beta_{m-n} & \qquad + a_m\alpha_0 + a_{m-1}\alpha_1 + \ldots & = 0, \\
 \ldots + b_n\beta_{m-n-1} & \qquad + a_m\alpha_1 + \ldots & = 0, \\
 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 b_n\beta_{m-q} & \qquad + a_m\alpha_{n-q} & = 0.
\end{array}$$

Nous appellerons enfin $S_{q,k}$ le système qu'on déduit de S_q en y supprimant les k premières équations, et $S_{q,k}^h$ le système obtenu en remplaçant la première équation $S_{q,k}$ par la $h^{\text{ième}}$ équation de S_q.

De ces définitions résultent les remarques suivantes :

Première remarque préliminaire. — Si l'on considère le système $S_{q,q-1}$, composé de $m+n-2q+2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $m+n-2q+2$ quantités $\beta_{m-q}, \beta_{m-q-1}, \ldots, \beta_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-q}$, les coefficients de ces quantités dans ce système forment un tableau carré, dont le déterminant est R_{q-1}, d'après la définition de R_i.

Deuxième remarque préliminaire. — D'après ce qu'on vient de voir, le déterminant des coefficients des β et des α dans $S_{p,p-1}$ est R_{p-1}. Alors, si l'on supprime la première équation du système $S_{p,p-1}$, ce qui donne le système $S_{p,p}$, et que dans ce dernier on supprime les termes en β_{m-p}, on voit que les coefficients des β et des α restants forment un tableau carré, dont le déterminant se déduit de R_{p-1} en supprimant sa première ligne et sa première colonne. Comme le nombre p désigne, dans ce travail, le degré du plus grand commun diviseur, il est au plus égal à n, et par suite le déterminant considéré est

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & b_{p-1} & b_p & a_p & a_{p-1} & . \\ & & . & . & & \\ & & . & . & & \\ & & . & . & & \\ & & b_n & . & & \\ & . & & a_m & . & \\ b_n & & & & . & \\ 0 & & & & & a_m \end{vmatrix}.$$

Il présente $m-p$ colonnes formées avec les coefficients b, et $n-p+1$ colonnes formées avec les coefficients a.

En le développant par rapport aux éléments de la dernière ligne, on a

$$\Delta = a_m . \begin{vmatrix} . & b_{p-1} & b_p & a_p & a_{p-1} & . \\ & & . & . & & \\ & & . & . & & \\ & & . & . & & \\ & & b_n & . & & \\ & . & & a_m & . & \\ & . & & & . & \\ b_n & & & & & a_m \end{vmatrix},$$

le déterminant qui multiplie a_m présentant $m-p$ colonnes formées avec les b et $n-p$ formées avec les a. Ce déterminant est donc R_p, et l'on a

$$\Delta = a_m R_p.$$

Troisième remarque préliminaire. — Lorsque dans $S_{q,q-1}$ on remplace la première équation par la $h^{\text{ième}}$ équation de S_q, h étant l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., $q-1$, les coefficients des β et des α dans le système obtenu $S^h_{q.q-1}$ forment un tableau carré, dont le déterminant est $R_{q-1,h}$, d'après la définition de $R_{i,j}$ donnée précédemment. Ainsi le déterminant de $S^j_{p.p-1}$ ($j=1, 2, \ldots, p-1$) est $R_{p-1,j}$, et le déterminant de $S^{j+1}_{p+1,p}$ ($j=0, 1, 2, \ldots, p-1$) est $R_{p.j+1}$.

Théorème I. — *Pour que le plus grand commun diviseur θ de f et g soit de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = R_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad R_p \gtrless 0.$$

En effet, si θ est de degré p, il existe (lemme II), quelle que soit la valeur de q choisie parmi les nombres 1, 2, ..., p, deux polynômes

$$u \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-q} x^{n-q},$$
$$v \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-q} x^{m-q},$$

où α_{n-q} et β_{m-q} sont différents de zéro, qui rendent identiquement nul le polynôme $uf + vg$, c'est-à-dire dont les coefficients vérifient le système S_q et, par suite, aussi le système $S_{q.q-1}$. Il en résulte que ce dernier système admet pour les β et les α une solution où ces quantités ne sont pas toutes nulles, puisque β_{m-q} et α_{n-q} en particulier, qui figurent dans la dernière équation avec les coefficients b_n, a_m essentiellement différents de zéro, ont, dans cette solution, des valeurs non

nulles. Par conséquent, enfin, le déterminant de ce système, qui est R_{q-1}, d'après la première remarque préliminaire, est nul; et, comme q désigne l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., p choisi arbitrairement, on a

$$R_0 = R_1 = R_2 = \ldots = R_{p-1} = 0.$$

En outre, d'après le lemme III, le système S_p fournit pour les β et les α une solution déterminée, à un facteur constant arbitraire près, dans laquelle α_{n-p} et β_{m-p} ont des valeurs différentes de zéro. Or, si l'on attribue à l'une quelconque des inconnues α_{n-p}, β_{m-p} une valeur arbitraire non nulle, la dernière équation fournit pour l'autre inconnue une valeur finie non nulle. Le système $S_{p,p}$, composé de $m+n-2p+1$ équations linéaires et non homogènes par rapport aux $m+n-2p+1$ inconnues $\beta_{m-p-1}, \ldots, \beta_0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-p}$, admet alors pour celles-ci une solution finie unique en fonction de β_{m-p}. Il en résulte que le déterminant formé par les coefficients des β et des α autres que β_{m-p} dans ce système est différent de zéro. Or on a vu (deuxième remarque préliminaire) que ce déterminant Δ a pour valeur $a_m R_p$; mais a_m est essentiellement différent de zéro; par conséquent, R_p est lui-même différent de zéro.

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Réciproquement, ces conditions sont suffisantes; car, en les supposant remplies, θ ne peut être de degré inférieur à p, puisque cela exigerait que l'un des déterminants $R_0, R_1, \ldots, R_{p-1}$ fût différent de zéro; il ne peut pas non plus être de degré supérieur à p, attendu que cela exigerait la condition $R_p = 0$. Dans les deux cas, le résultat serait en contradiction avec les hypothèses. Donc θ est de degré p.

On peut démontrer un second théorème équivalent au précédent, mais qui donne les conditions nécessaires et suffisantes au moyen de $p+1$ déterminants de même ordre que R_p.

THÉORÈME II. — *Pour que le plus grand commun diviseur θ de f et g soit de degré p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$R_{p-1,1} = R_{p-1,2} = \ldots = R_{p-1,p-1} = R_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad R_p \gtrless 0.$$

En effet, si θ est de degré p, il résulte du lemme III que le système S_p admet pour les β et les α une solution unique (abstraction faite d'un facteur constant arbitraire), dans laquelle les valeurs de α_{n-p} et β_{m-p} ne sont pas nulles. Il en est ainsi, en particulier, du système $S_{p,p-1}$ et de chacun des $p-1$ systèmes $S^j_{p,p-1}$ ($j=1, 2, \ldots, p-1$). Donc les déterminants de ces systèmes homogènes, qui sont R_{p-1}, $R_{p-1,1}$, $R_{p-1,2}$, ..., $R_{p-1,p-1}$, d'après la troisième remarque préliminaire, sont nuls.

Si, de plus, on attribue à β_{m-p} une valeur arbitraire non nulle, dans le système $S_{p,p}$, qui est linéaire et non homogène par rapport aux quantités β_{m-p-1}, ..., β_0, α_0, ..., α_{n-p}, ce système admettant une solution unique pour ces quantités, le déterminant de leurs coefficients dans $S_{p,p}$ est différent de zéro. Or, d'après la deuxième remarque préliminaire, ce déterminant Δ a pour valeur $a_m R_p$, et comme a_m est essentiellement différent de zéro, on a $R_p \gtrless 0$. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Elles sont suffisantes. En effet, en les supposant remplies, le système S_p fournit, pour les β et les α, un seul système de valeurs, déterminées à un facteur constant près, où α_{n-p} et β_{m-p} sont différents de zéro. Il y a donc

un couple de polynômes u, v, de degrés $n - p$ et $m - p$, tels que le polynôme $uf + vg$ soit identiquement nul, et il n'en existe qu'un, abstraction faite d'un facteur constant arbitraire. Par conséquent (lemme IV), le plus grand commun diviseur θ est de degré p.

Expression du plus grand commun diviseur de f et g. — En supposant que f et g aient un plus grand commun diviseur θ de degré p, proposons-nous de former ce polynôme.

Si l'on peut trouver deux polynômes u, v déterminés, et un polynôme déterminé θ de degré p, tels qu'on ait $uf + vg \equiv \theta$, ce polynôme θ est le plus grand commun diviseur de f et g; car, si cette relation existe, tout diviseur commun à f et g divise θ; il en est ainsi, en particulier, du plus grand commun diviseur de f et g, et, comme il est de même degré p que θ, il lui est égal, à un facteur constant près.

De cette simple observation résulte immédiatement la marche à suivre pour rechercher θ.

Posons

$$u \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-q} x^{n-q},$$
$$v \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-q} x^{m-q},$$
$$\theta \equiv \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_{p-1} x^{p-1} + x^p,$$

et cherchons à déterminer q de façon que l'identité $uf + vg \equiv \theta$ ait lieu pour des valeurs déterminées des α, des β et des γ.

L'identité $uf + vg \equiv \theta$ est équivalente à un système d'équations linéaires par rapport aux α, aux β et aux γ; ce système n'est pas homogène, puisque le coefficient de x^p dans θ est l'unité. Pour qu'il fournisse une solution unique pour les α, les β et les γ, il faut que le nombre d'équations soit égal à celui des inconnues. Or celles-ci sont en nombre $(n - q + 1) + (m - q + 1) + p$.

nombre qui surpasse le nombre $p+2$ des termes de θ de la quantité $(n-q)+(m-q)$, positive ou nulle. Il faut donc que le nombre des termes de $uf+vg$ surpasse d'autant d'unités le nombre $p+2$. Or ce nombre de termes est supérieur d'une unité au degré $m+n-q$ de ce polynôme. On doit donc avoir

$$m+n-q+1=(m+n-2q)+p+2,$$

c'est-à-dire

$$q=p+1.$$

Pour que cette valeur de q soit admissible, il faut et il suffit qu'elle ne rende pas négatif le nombre $n-q$, puisque celui-ci représente le degré de u. Il faut donc et il suffit qu'on ait $n-(p+1)\geqq 0$, c'est-à-dire $p\leqq n-1$, ou enfin que p ne soit pas égal à n, puisque, d'après sa définition, p ne peut surpasser n. Or on peut exclure le cas où p serait égal à n, sans restreindre la généralité du raisonnement, puisque, dans ce cas, θ est immédiatement connu et n'est autre chose que le polynôme g lui-même.

Adoptant donc pour q la valeur $p+1$, le système qui détermine les α, les β et les γ est

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{A} & \left\{\begin{array}{l}
b_0\beta_0+a_0\alpha_0 \qquad\qquad -\gamma_0=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\\
+b_{j-1}\beta_1+b_j\beta_0+a_j\alpha_0+a_{j-1}\alpha_1+\ldots-\gamma_j=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
+b_{p-1}\beta_0+a_{p-1}\alpha_0+\ldots \qquad -\gamma_{p-1}=0,
\end{array}\right.\\
\mathrm{B} & \left\{\begin{array}{l}
+b_p\beta_0+a_p\alpha_0+\ldots \qquad -1=0,\\
+b_{p+1}\beta_0+a_{p+1}\alpha_0+\ldots \qquad =0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
b_n\beta_{m-p-1} \qquad\qquad +a_m\alpha_{n-p-1}=0.
\end{array}\right.
\end{array}$$

Le groupe A des p premières équations se déduit du groupe des p premières équations du système S_{p+1} en

retranchant à leurs premiers membres respectivement $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$. Le second groupe B est le groupe $S_{p+1,p}$, où l'on a simplement retranché l'unité au premier membre de la première équation.

Pour avoir l'inconnue γ_j, j désignant l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, nous calculerons les α et les β au moyen du système B, et nous porterons leurs valeurs dans la $(j+1)^{\text{ième}}$ équation du système A. Or on sait que le résultat final de cette substitution s'obtient en égalant à zéro le déterminant complet D du système formé par la réunion de la $(j+1)^{\text{ième}}$ équation de A avec le système B. On a ainsi

$$D = \begin{vmatrix}
. & . & . & . & & b_j & a_j & . & . & . & -\gamma_j \\
 & & & & & b_p & a_p & & & & -1 \\
 & & & & b_p & b_{p+1} & a_{p+1} & a_p & & & 0 \\
 & & & & & . & . & & & & 0 \\
 & & & & & . & . & & & & \\
 & & & & & . & . & & & & \\
 & & & & & b_n & . & & & & \\
 & & & & b_n & & a_m & & & & \\
 & & & . & & & & a_m & & & \\
 & & . & & & & & & . & & \\
 & . & & & & & & & & . & 0 \\
b_n & & & & & & & & & a_m &
\end{vmatrix} = 0.$$

les deux premiers éléments de la dernière colonne de D étant $-\gamma_j$ et -1, et tous les autres étant nuls.

Or, le déterminant obtenu en supprimant dans D la dernière colonne et la première ligne est celui du système $S_{p+1,p}$, c'est-à-dire R_p, d'après la première remarque préliminaire. Le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne et la seconde ligne de D est celui du système $S_{p+1,p}^{j+1}$: c'est donc $R_{p,j+1}$ en vertu de la troisième remarque préliminaire. Il résulte de là que,

en développant D par rapport aux éléments de la dernière colonne, l'équation précédente peut s'écrire

$$\gamma_j \mathrm{R}_p - \mathrm{R}_{p,j+1} = 0,$$

d'où

$$\gamma_j = \frac{\mathrm{R}_{p,j+1}}{\mathrm{R}_p}.$$

On peut donc facilement énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Lorsque le plus grand commun diviseur θ de f et g est de degré p, l'expression de ce polynôme est donnée par l'identité*

$$\mathrm{R}_p \theta \equiv \mathrm{R}_{p,1} + \mathrm{R}_{p,2} x + \ldots + \mathrm{R}_{p,p} x^{p-1} + \mathrm{R}_p x^p.$$

SECONDE PARTIE.

RÉSULTANT DE BÉZOUT-CAUCHY.

Notations. — Dans ce qui suit, nous poserons

$$\left.\begin{aligned} f_i &\equiv a_{i+1} + a_{i+2} x + \ldots + a_m x^{m-i-1}, \\ g_i &\equiv b_{i+1} + b_{i+2} x + \ldots + b_n x^{n-i-1}, \\ g_i f - f_i g &\equiv c_{i0} + c_{i1} x + \ldots + c_{i,m+n-i-1} x^{m+n-i-1}, \end{aligned}\right\} (i < n)$$

$$r_0 = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{10} & \ldots & c_{n-1,0} & b_0 & & & & & & \\ c_{01} & c_{11} & \ldots & c_{n-1,1} & b_1 & b_0 & & & & & \\ . & . & \ldots & . & . & . & . & & & & \\ . & . & \ldots & . & . & . & & . & & & \\ . & . & \ldots & . & . & . & & & . & & \\ . & . & \ldots & . & . & . & & & & b_0 & \\ . & . & \ldots & . & b_n & . & & & & . & \\ . & . & \ldots & . & & b_n & & & & . & \\ . & . & \ldots & . & & & . & & & . & \\ . & . & \ldots & . & & & & . & & . & \\ . & . & \ldots & . & & & & & & & \\ c_{0,m-1} & c_{1,m-1} & \ldots & c_{n-1,m-1} & & & & & & & b_n \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant r_0 est le résultant d'ordre m de Bézout-Cauchy. Les coefficients c_{ij} y occupent la surface d'un rectangle, dans lequel c_{ij} est à l'intersection de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ième}}$ colonne. Les coefficients b y occupent la surface d'un parallélogramme. En dehors de ces deux surfaces, tous les éléments sont nuls.

Nous appellerons r_i le déterminant formé au moyen de r_0, en y supprimant les i premières lignes et les i premières colonnes, et r_{ij} le déterminant qu'on déduit de r_i en substituant à sa première ligne les éléments correspondants de la $j^{\text{ième}}$ ligne de r_0.

Nous appellerons s_q le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{l}
c_{q-1,0}\lambda_0+c_{q,0}\lambda_1+\ldots+c_{n-1,0}\lambda_{n-q}+\lambda_{n-q+1}b_0 = 0,\\
c_{q-1,1}\lambda_0+c_{q,1}\lambda_1+\ldots+c_{n-1,1}\lambda_{n-q}+\lambda_{n-q+1}b_1+\lambda_{n-q+2}b_0 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{q-1,n}\lambda_0+c_{q,n}\lambda_1+\ldots+c_{n-1,n}\lambda_{n-q}+\lambda_{n-q+1}b_n+\lambda_{n-q+2}b_1+\ldots = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
c_{q-1,m-1}\lambda_0+c_{q,m-1}\lambda_1+\ldots+c_{n-1,m-1}\lambda_{n-q}+\lambda_{m-q}b_n = 0
\end{array}$$

Nous désignerons par $s_{q,k}$ le système qu'on déduit de s_q en y supprimant les k premières équations, et par $s^h_{q,q-1}$ le système obtenu en remplaçant la première équation de $s_{q,q-1}$ par la $h^{\text{ième}}$ équation de s_q.

Cela posé, nous ferons quatre remarques préliminaires importantes.

Première remarque préliminaire. — Si l'on considère le système $s_{q,q-1}$, composé de $m-q+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $m-q+1$ quantités $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-q}$, le déterminant des coefficients de ce système est r_{q-1}, d'après la définition de r_i.

Deuxième remarque préliminaire. — D'après ce qu'on vient de voir, le déterminant de $s_{p,p-1}$ est r_{p-1}.

Alors, si l'on supprime la première équation de $s_{p,p-1}$, ce qui donne $s_{p,p}$, et que dans ce dernier système on supprime les termes en λ_0, le déterminant des coefficients restants se déduit de r_{p-1} en supprimant sa première ligne et sa première colonne : ce déterminant est donc r_p.

Troisième remarque préliminaire. — Lorsque dans $s_{q,q-1}$ on remplace la première équation par la $h^{\text{ième}}$ équation de s_q, h étant l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., $q-1$, le déterminant du système obtenu $s^h_{q,q-1}$ est $r_{q-1,h}$, d'après la définition de r_{ij}.

Ainsi, le déterminant $s^j_{p,p-1}$ ($j = 1, 2, \dots, p-1$) est $r_{p-1,j}$, et le déterminant de $s^{j+1}_{p+1,p}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, p-1$) est $r_{p,j+1}$.

Quatrième remarque préliminaire. — On peut mettre les polynômes u et v

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{n-q} x^{n-q} \\ v &= \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_{m-q} x^{m-q} \end{aligned}\right\} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p+1)$$

sous la forme

$$\begin{aligned} u &= \lambda_0 g_{q-1} + \lambda_1 g_q + \ldots + \lambda_{n-q} g_{n-1}, \\ v &= \mu_0 f_{q-1} + \mu_1 f_q + \ldots + \mu_{n-q} f_{n-1} \\ &\quad + \lambda_{n-q+1} + \lambda_{n-q+2} x + \ldots + \lambda_{m-q} x^{m-q-1}, \end{aligned}$$

λ_0 et μ_0 étant différents de zéro, si ces polynômes sont exactement de degrés $n-q$ et $m-q$.

En effet, pour cela, il faut et il suffit que les systèmes obtenus par identification donnent pour les λ et les μ des valeurs finies et déterminées, quels que soient les α

et les β. Or ces deux systèmes sont :

$$
\mathrm{U}\left\{
\begin{array}{ll}
b_n\lambda_0 & = \alpha_{n-q},\\
b_{n-1}\lambda_0 + b_n\lambda_1 & = \alpha_{n-q-1},\\
\dots\dots\dots\dots & \\
b_{n+q-h}\lambda_0 + \dots + b_n\lambda_{h-q} & = \alpha_{n-h},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
b_q\lambda_0 + \dots\dots\dots\dots\dots + b_n\lambda_{n-q} & = \alpha_0,
\end{array}
\right.
$$

$$
\mathrm{V}\left\{
\begin{array}{ll}
a_m\mu_0 & = \beta_{m-q},\\
a_{m-1}\mu_0 + a_m\mu_1 & = \beta_{m-q-1},\\
\dots\dots\dots\dots & \\
a_{m+q-h}\mu_0 + \dots + a_m\mu_{h-q} & = \beta_{m-h},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{q+m-n}\mu_0 + \dots\dots\dots\dots + a_m\mu_{n-q} & = \beta_{m-n},\\
a_{q+m-n-1}\mu_0 + \dots\dots\dots\dots + a_{m-1}\mu_{n-q} + \lambda_{m-q} & = \beta_{m-n-1},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_q\mu_0 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_n\mu_{n-q} + \lambda_{n-q+1} & = \beta_0.
\end{array}
\right.
$$

Le déterminant des coefficients des inconnues λ du système U est $(b_n)^{n-q+1}$, qui est différent de zéro : ces inconnues ont donc des valeurs finies déterminées.

Le déterminant des coefficients des inconnues μ dans les $n-q+1$ premières équations du système V étant $(a_m)^{n-q+1}$ est aussi différent de zéro, et ces inconnues μ ont des valeurs finies déterminées. Enfin chacune des $m-n$ dernières équations du système V ne contient qu'une inconnue λ, qui est d'ailleurs affectée d'un coefficient égal à l'unité, en sorte que ces inconnues λ, à leur tour, ont des valeurs finies déterminées.

D'ailleurs la première équation de chacun des systèmes U, V montre que si u et v sont exactement de degrés $n-q$ et $m-q$, ce qui suppose $\alpha_{n-q}\beta_{m-q} \gtrless 0$, on a

$$\lambda_0\mu_0 \gtrless 0.$$

Théorème I. — *Pour que le plus grand commun divi-*

seur θ de f et g soit de degré p, il faut et il suffit que l'on ait

$$r_0 = r_1 = r_2 = \ldots = r_{p-1} = 0 \quad \text{et} \quad r_p \gtrless 0.$$

En effet, si θ est de degré p, il existe (lemme II), quelle que soit la valeur de q prise par les nombres 1, 2, ..., p, deux polynômes u, v de degrés $n-q$, $m-q$ tels que le polynôme $uf + vg$ soit identiquement nul. Égalons d'abord à zéro les coefficients des termes des degrés m, $m+1$, ..., $m+n-q$. Or le coefficient de x^{m+n-h}, h désignant l'un quelconque des entiers q, $q+1$, ..., n, est

$$\begin{aligned} &a_{m+q-h}\alpha_{n-q} + \ldots + a_{m-1}\alpha_{n-h+1} + a_m\alpha_{n-h} \\ &+ b_{n+q-h}\beta_{m-q} + \ldots + b_{n-1}\beta_{m-h+1} + b_n\beta_{m-h}, \end{aligned}$$

ou, d'après les équations U, V de la quatrième remarque préliminaire,

$$\begin{aligned} &(\lambda_0 + \mu_0)(a_{m+q-h}\ b_n + \ldots + a_m b_{n+q-h}) \\ &+ (\lambda_1 + \mu_1)(a_{m+q-h+1} b_n + \ldots + a_m b_{n+q-h+1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\lambda_{h-q} + \mu_{h-q}) a_m b_n. \end{aligned}$$

En égalant à zéro les valeurs que prend cette expression, quand on y donne successivement à h les valeurs q, $q+1$, ..., n, on aura des équations de la forme

$$\begin{aligned} &(\lambda_0 + \mu_0) a_m b_n = 0, \\ &(\lambda_0 + \mu_0) H_1 + (\lambda_1 + \mu_1) a_m b_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(\lambda_0 + \mu_0) H_{n-q} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (\lambda_{n-q} + \mu_{n-q}) a_m b_n = 0, \end{aligned}$$

H_1, H_2, ..., H_{n-q}, ... étant des coefficients déterminés. Mais on a

$$a_m b_n \gtrless 0;$$

ce système exige donc

$$\mu_0 = -\lambda_0, \quad \mu_1 = -\lambda_1, \quad \ldots, \quad \mu_{n-q} = -\lambda_{n-q}.$$

En tenant compte de ce premier résultat, le polynôme $uf+vg$ devient

$$\begin{aligned}&\lambda_0(g_{q-1}f-f_{q-1}g)+\lambda_1(g_q f-f_q g)+\ldots\\&+\lambda_{n-q}(g_{n-1}f-f_{n-1}g)+\lambda_{n-q+1}g\\&+\lambda_{n-q+2}xg+\ldots+\lambda_{m-q}x^{m-n-1}g,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\lambda_0(c_{q-1,0}+c_{q-1,1}x-\ldots)\\&+\lambda_1(c_{q,0}\quad+c_{q,1}\quad x+\ldots)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\lambda_{n-q}(c_{n-1,0}+c_{n-1,1}x+\ldots)\\&+\lambda_{n-q+1}(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n)\\&+\lambda_{n-q+2}(\qquad b_0x+\ldots+b_{n-1}x^n+b_nx^{n+1})\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\lambda_{m-q}\quad(\qquad b_0x^{m-n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_nx^{m-1}).\end{aligned}$$

Il reste actuellement à égaler à zéro les coefficients de $x^0, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$, ce qui donne le système désigné précédemment par s_q. Ce système doit avoir par rapport aux λ une solution où λ_0 ait une valeur non nulle. Il en est de même du système $s_{q,q-1}$; par suite, le déterminant de ce système, qui est r_{q-1} d'après la première remarque préliminaire, est nul. Et comme ceci a lieu en donnant à q successivement les valeurs $1, 2, \ldots, p$, on a les conditions

$$r_0=r_1=r_2=\ldots=r_{p-1}=0.$$

En outre, d'après le lemme III et en vertu de la quatrième remarque préliminaire, le système $s_{p,p}$ admet pour les λ une solution où λ_0 n'est pas nul; et, par suite, si l'on donne à λ_0 une valeur arbitraire non nulle, il admet pour les autres λ une solution finie unique, en sorte que le déterminant des coefficients de ces inconnues est différent de zéro. Mais, d'après la deuxième remarque

préliminaire, ce déterminant est r_p. On a donc

$$r_p \gtrless 0.$$

Les conditions énoncées sont, par conséquent, nécessaires.

Elles sont suffisantes; car, si θ était de degré inférieur à p, le premier déterminant r_i non nul aurait un indice inférieur à p, et si θ était de degré supérieur à p, le premier déterminant r_i non nul aurait un indice supérieur à p, résultats contraires l'un et l'autre aux hypothèses. Donc θ est de degré p.

Théorème II. — *Pour que le degré du plus grand commun diviseur θ de f et g soit p, il faut et il suffit que l'on ait*

$$r_{p-1,1} = r_{p-1,2} = \ldots = r_{p-1,p-1} = r_{p-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad r_p \gtrless 0.$$

Dans la démonstration du théorème précédent, on a déjà prouvé la nécessité des conditions $r_{p-1} = 0$ et $r_p \gtrless 0$, au cas où θ est de degré p. Il faut en outre, d'après le lemme III, que chacun des systèmes

$$s^j_{p,p-1} (j = 1, 2, \ldots p-1)$$

ait une solution où les inconnues ne soient pas toutes nulles (puisque λ_0 est différent de zéro) : or cela exige que les déterminants de ces systèmes, qui, d'après la troisième remarque préliminaire, sont $r_{p-1,1}$, $r_{p-1,2}$, ..., $r_{p-1,p-1}$ soient nuls. Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Elles sont suffisantes. En effet, en les supposant remplies, il existe un couple et un seul de polynômes u, v de degrés $n-p$ et $m-p$, tels que $uf + vg$ soit identiquement nul (en faisant abstraction d'un facteur constant arbitraire pour u et v), et, par suite (lemme IV), θ est de degré p.

Expression du plus grand commun diviseur θ de f et g. — On suppose remplies les conditions énoncées soit dans le théorème I, soit dans le théorème II. Cela étant, on va chercher deux polynômes déterminés u et v, tels que $uf + vg$ soit un polynôme de degré p : ce polynôme sera le plus grand commun diviseur cherché θ.

Dans les polynômes u et v, pris sous la forme spéciale qu'autorise la quatrième remarque préliminaire, adoptons pour q la valeur $p+1$, puis posons

$$\theta \equiv \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_{p-1} x^{p-1} + x^p,$$

et identifions les polynômes $uf + vg$ et θ. On obtient ainsi un système d'équations qu'on peut décomposer en deux groupes : le premier groupe A se déduit du groupe des $p+1$ premières équations du système s_{p+1}, en retranchant respectivement à leurs premiers membres γ_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1}$; le second groupe B est le groupe $s_{p+1,p}$, où l'on a simplement retranché l'unité au premier membre de la première équation.

L'équation donnant γ_j, où j a pour valeur l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$, s'obtiendra en éliminant les λ entre la $(j+1)^{\text{ième}}$ équation du groupe A et les équations du système B. Le résultat de l'élimination s'obtient en égalant à zéro le déterminant complet d de ce système, ce qui donne

$$d = \begin{vmatrix} c_{p,j} & c_{p+1,j} & \ldots & c_{n-1,j} & b_j & b_{j-1} & \ldots & -\gamma_j \\ c_{p,p} & c_{p+1,p} & \ldots & c_{n-1,p} & b_p & b_{p-1} & \ldots & -1 \\ c_{p,p+1} & c_{p+1,p+1} & \ldots & c_{n-1,p+1} & b_{p+1} & b_p & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{p,m-1} & c_{p+1,m-1} & \ldots & c_{n-1,m-1} & \ldots & \ldots & b_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or le déterminant obtenu en supprimant dans d la der-

nière colonne et la première ligne est celui du groupe $s_{p+1,p}$, c'est-à-dire r_p d'après la première remarque préliminaire. Le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne et la seconde ligne de d est celui du système $s^{j+1}_{p+1,p}$ $(j=0, 1, 2, \ldots, p-1)$, c'est-à-dire $r_{p,j+1}$ en vertu de la troisième remarque préliminaire. En développant d par rapport aux éléments de la dernière colonne, l'équation $d=0$ peut donc s'écrire

$$\gamma_j r_p - r_{p,j+1} = 0,$$

d'où

$$\gamma_j = \frac{r_{p,j+1}}{r_p}.$$

On peut donc enfin énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Quand f et g ont un plus grand commun diviseur θ de degré p, ce polynôme est donné par l'identité*

$$r_p\theta \equiv r_{p,1} + r_{p,2}x + r_{p,3}x^2 + \ldots + r_{p,p}x^{p-1} + r_p x^p.$$

SUR UNE FORME DU DÉTERMINANT DE VANDERMONDE;

Par M. WEILL.

$a, b, c, \ldots l$, étant des quantités distinctes, la fraction $\frac{1}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)}$ peut se mettre sous la forme $\sum \frac{A}{x-a}$; les quantités A, B, ..., L seront données par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A + B + \ldots + L = 0, \\ AS_1^a + BS_1^b + \ldots + LS_1^l = 0, \\ AS_2^a + BS_2^b + \ldots = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

en désignant par S_p^a la somme des produits p à p de toutes les quantités $a, b, c, \ldots l$, sauf a, et ainsi des autres.

Les équations (1) étant toujours possibles, leur déterminant n'est pas nul; or ce déterminant, qui est

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ S_1^a & S_1^b & & . & \ldots & S_1^l \\ S_2^a & S_2^b & . & . & \ldots & .. \\ .. & .. & . & . & \ldots & .. \end{vmatrix},$$

s'annule quand deux quelconques des quantités a, b, $c, \ldots$ deviennent égales, et il est, par rapport aux lettres, de même degré que le déterminant de Vandermonde; donc il n'en diffère que par un facteur numérique, qui est, comme on le voit facilement, $(+1)$, si le nombre des quantités est pair, et (-1) si ce nombre est impair. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c-a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & c+d+a & d+a+b & a+b+c \\ bc+cd+db & cd+da+ac & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ bcd & cda & dab & abc \end{vmatrix}.$$

En résolvant le système (1) par rapport à A, on en conclut qu'un déterminant tel que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ S_1^b & S_1^c & \ldots & S_1^l \\ S_2^b & S_2^c & \ldots & S_2^l \\ .. & .. & \ldots & .. \end{vmatrix}$$

est indépendant de a; il suffit, pour le voir, d'égaler entre elles les deux valeurs de A obtenues l'une directement, et l'autre, en résolvant le système (1).

APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES CONIQUES;

Par M. WEILL.

I. Deux coniques passent par A, B, C, D et touchent une droite en H et K; une troisième conique passant par A, B, C, D rencontre la droite en deux points P et Q qui forment avec H et K une division harmonique; d'où l'on conclut : trois coniques étant inscrites à un quadrilatère, si en un point commun à deux d'entre elles on mène les tangentes à ces deux courbes, ces tangentes forment un faisceau harmonique avec les tangentes menées de ce même point à la troisième. Prenant pour l'une des quatre tangentes la droite de l'infini, on a le résultat suivant :

Si, par le foyer d'une parabole tangente à trois droites, on fait passer les deux paraboles qui touchent ces trois droites, elles se coupent à angle droit au point considéré.

Soit donc M un point du cercle circonscrit au triangle formé par les trois droites : les deux paraboles qui passent en M et touchent les trois droites se coupent à angle droit au point M. On peut remarquer que les trois autres points de rencontre des paraboles décrivent trois coniques distinctes quand M se meut sur le cercle, et que les points de rencontre des côtés opposés et le

point de rencontre des diagonales du quadrilatère qui a pour sommets les quatre points sont trois points fixes.

II. Soit PCD un triangle conjugué par rapport à une conique. Inscrivons une conique ω dans le triangle PCD; on sait qu'on peut alors incrire dans la première conique un triangle RST conjugué par rapport à la seconde; prenons la droite CD pour droite de l'infini, nous aurons le résultat suivant : le foyer d'une parabole conjuguée à un triangle coïncide avec le centre d'une hyperbole équilatère circonscrite au triangle; en d'autres termes, *le lieu des foyers des paraboles conjuguées à un triangle est le cercle des neuf points du triangle.* Ce résultat a été énoncé par Painvin (*Nouvelles Annales,* p. 443; année 1867).

III. Faisons passer une conique par les sommets d'un triangle PCD conjugué par rapport à une deuxième conique : on sait qu'on peut circonscrire à cette deuxième conique un triangle qui soit conjugué par rapport à la première; considérons ce triangle comme fixe, et prenons la droite CD pour droite de l'infini, nous aurons le résultat suivant :

Le lieu des centres des hyperboles équilatères inscrites dans un triangle est le cercle conjugué à ce triangle.

Ce théorème est bien connu.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN S;

PAR M. MARCHAND.

Soit $F(s) = 0$ l'équation donnée

$$(1) \qquad F(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-s \end{vmatrix}.$$

Je trouve dans le *Traité d'Analyse* de M. Laurent (t. I, p. 240) :

« Si $F = 0$ a une racine double, tous les mineurs de F sont nuls, et réciproquement d'ailleurs, car alors $F'(s)$ sera nul.

» Je dis que, en général, si $F(s)$ a une racine d'ordre de multiplicité h, tous les mineurs d'ordre $h-1$ de $F(s)$ sont nuls. »

La réciproque est encore vraie : si tous les mineurs d'ordre $h-1$ sont nuls, sans que tous ceux d'ordre h le soient, la racine est multiple d'ordre h. C'est ce que je me propose d'établir ici en développant les conséquences de la méthode de Sylvester. Je ne reviendrai pas d'ailleurs sur la partie connue de la démonstration, qui établit l'impossibilité de l'existence de racines imaginaires.

Le calcul repose sur ce que le produit $F(s)F(-s)$ prend une forme très remarquable

$$(2) \quad F(s)F(-s) = \begin{vmatrix} A_{11}-s^2 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}-s^2 & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}-s^2 \end{vmatrix},$$

$$A_{hk} = a_{h1}a_{k1} + a_{h2}a_{k2} + \ldots + a_{hn}a_{kn}.$$

Je dis que le coefficient de $(-s^2)^p$ sera la somme des carrés de tous les mineurs d'ordre p du déterminant

$$(3) \qquad \Delta = \mathrm{F}(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En effet ce coefficient sera la somme de tous les mineurs de

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & \dots & \mathrm{A}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{n1} & \mathrm{A}_{n2} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix},$$

obtenus en supprimant p *lignes quelconques* et les p colonnes ayant respectivement les mêmes indices que ces p lignes.

Considérons en particulier un de ces mineurs de (4) : ses éléments se déduiront de ceux que l'on obtiendrait en formant le produit complet des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

en laissant de côté les p *lignes quelconques* choisies, dans chacun des deux déterminants Δ qu'on combinerait ligne à ligne pour avoir le produit. D'après le théorème général de Binet et Cauchy, il restera un déterminant égal à la somme des carrés des mineurs de Δ que l'on peut former après suppression des p lignes considérées.

Si donc je désigne par Δ le déterminant (3), par Δ_1 un quelconque de ses mineurs du premier ordre, par Δ_2 un quelconque de ses mineurs du second ordre, etc., j'aurai

$$(5) \qquad \mathrm{F}(s)\,\mathrm{F}(-s) = \Delta^2 - s^2 \sum \Delta_1^2 + s^4 \sum \Delta_2^2 - s^6 \sum \Delta_3^2 + \dots.$$

Le déterminant (1) est de même forme que le déterminant (3); on a $a_{11} - s$, au lieu de a_{11}, ...

Alors, au lieu de (5), je puis écrire

$$(6)\qquad F(s+\varepsilon)F(s-\varepsilon) = \Delta^2 - \varepsilon^2\Sigma\,\Delta_1^2 + \varepsilon^4\Sigma\,\Delta_2^4 - \ldots.$$

Dans (6) Δ représente $F(s)$, Δ_1 un mineur du premier ordre de $F(s)$, ...

D'autre part, la formule de Taylor donne aussitôt

$$F(s+\varepsilon) = F(s) + \varepsilon F_1(s) + \varepsilon^2 F_2(s) + \ldots,$$
$$F(s-\varepsilon) = F(s) - \varepsilon F_1(s) + \varepsilon^2 F_2(s) - \ldots,$$
$$F_p(s) = \frac{F^{p)}(s)}{1.2\ldots p}.$$

On obtient cette nouvelle identité

$$(7)\qquad F(s+\varepsilon)F(s-\varepsilon) = \Sigma\,\varepsilon^{2p}(F_{2p}F - F_{2p-1}F_1 + \ldots + FF_{2p}).$$

Identifiant les polynômes (6) et (7) en ε^2, on a les résultats qu'il s'agissait d'obtenir

$$(8)\qquad \begin{cases} F^2 = \Delta^2, \\ 2FF_2 - F_1^2 = -\Sigma\,\Delta_1^2, \\ 2FF_4 - 2F_1F_3 + F_2^2 = \Sigma\,\Delta_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2FF_{2p} - 2F_1F_{2p-1} + \ldots + (-1)^p F_p^2 = (-1)^p\Sigma\,\Delta_p^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La conclusion est dès lors évidente.

Si

$$F = F_1 = F_2 = \ldots = F_{p-1} = 0, \qquad F_p \neq 0,$$

il en résulte

$$\Delta^2 = 0, \qquad \Sigma\,\Delta_1^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma\,\Delta_{p-1}^2 = 0,$$
$$\Sigma\,\Delta_p^2 = (-1)^p F_p^2 \neq 0.$$

Pour une racine d'ordre p, tous les mineurs jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement sont nuls; les mineurs d'ordre p ne sont pas tous nuls.

Chaque hypothèse différente sur le degré de multiplicité de la racine de l'équation en s conduisant à des conclusions différentes, on peut dire réciproquement que, si tous les mineurs sont nuls jusqu'à l'ordre p exclusivement, la racine est d'ordre p de multiplicité.

Cas particulier. — Si l'on prend l'équation ordinaire

$$(1\,bis)\qquad F(s)=\begin{vmatrix} A-s & B'' & B' \\ B'' & A'-s & B \\ B' & B & A''-s \end{vmatrix}=0,$$

les relations (8) se réduisent à deux égalités faciles à vérifier directement

$$(8\,bis)\qquad \begin{cases} F_1^2-2FF_2=\Sigma\Delta_1^2, \\ F_2^2-2F_1F_3=\Sigma\Delta_2^2. \end{cases}$$

La première se déduit facilement de l'identité utilisée par M. Laurent (t. I, p. 239)

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial(a_{11}-s)\,\partial(a_{ii}-s)}=\frac{\partial F}{\partial(a_{11}-s)}\,\frac{\partial F}{\partial(a_{ii}-s)}-\left(\frac{\partial F}{\partial a_{1i}}\right)^2.$$

La deuxième ne diffère pas essentiellement de l'identité connue par laquelle on prouve qu'il est impossible que l'on ait simultanément

$$A+A'+A''=0,\qquad A'A''-B^2+A''A-B'^2+AA'-B''^2=0.$$

Dans le cas particulier, considéré ici, le théorème de Rolle est d'application facile

$$F_3=-1,\qquad F_2=A-s+A'-s+A''-s.$$

La dérivée seconde F_2 admet donc la racine

$$s_1=\frac{A+A'+A''}{3}.$$

Pour $-\infty$ et $+\infty$ la dérivée première a le signe $-$.

Comme

$$F_2^2 + 2F_1 = 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2$$
$$+ (A - S)^2 + (A' - S)^2 + (A'' - S)^2,$$

la racine s_1 de F_2 donnera le signe $+$ pour F_1, excepté si

$$B = B' = B'' = A - S = A' - S = A'' - S = 0.$$

Donc, sauf dans le cas de la sphère, qui se traite comme on sait directement, on a

$$\begin{array}{ccc} F_1(-\infty), & F_1(s_1), & F_1(+\infty). \\ - & + & - \end{array}$$

La dérivée F_1 a donc deux racines $s_2 < s_3$ différentes, sauf pour le cas de la sphère.

Comme

$$F_1^2 - 2FF_2 = \Sigma\Delta_1^2,$$

on a

$$F(s_2)F_2(s_2) < 0,$$
$$F(s_3)F_2(s_3) < 0;$$

d'où

$$F(s_2) < 0,$$
$$F(s_3) > 0.$$

Alors, d'après le théorème de Rolle, toutes les racines sont réelles, car on a

$$\begin{array}{cccc} F(-\infty), & F(s_2), & F(s_3), & F(\infty). \\ + & - & + & - \end{array}$$

Le raisonnement n'est en défaut que si $\Sigma\Delta_1^2$ s'annule pour s_2 ou pour s_3. Mais alors $F = F_1 = 0$; on a une racine double et l'on trouve les conditions générales suffisantes et nécessaires pour qu'il en soit ainsi : $\Sigma\Delta_1^2 = 0$.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

Par M. Max. GENTY.

Théorème. — *Le produit du paramètre de distribution des plans tangents, relatif à une génératrice d'un hyperboloïde par le carré de la distance du centre de l'hyperboloïde à cette génératrice est constant et égal au produit des demi-axes de la surface.*

Considérons un hyperboloïde de centre ω. Du point ω abaissons une perpendiculaire ωo sur l'une des génératrices de cet hyperboloïde. Prenons maintenant le point o pour origine des coordonnées, la génératrice considérée pour axe des z, la droite $o\omega$ pour axe des x et une perpendiculaire menée par le point o au plan xoz pour axe des y.

L'équation de la surface est alors, en désignant par D la distance $o\omega$,

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B''xy - 2D(Ax + B''y) = 0.$$

L'expression d'une droite infiniment voisine de $\overline{oz}$ a pour équation

$$x = az + x_1,$$
$$y = bz + y_1,$$

a et b étant des infiniment petits et x_1, y_1 étant les coordonnées du point où cette droite perce le plan des xy.

Exprimons que cette droite est sur l'hyperboloïde. Pour cela, formons l'équation aux z des points d'intersection de la droite et de la surface et exprimons, en négligeant

les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, que cette équation est indéterminée.

Nous avons ainsi les trois conditions

$$b = 0, \qquad By_1 - D(Aa + B''b) = 0, \qquad Ax_1 + B''y_1 = 0.$$

Les équations de la génératrice de l'hyperboloïde infiniment voisine de $\overline{oz}$ sont donc

$$\begin{cases} x = az + x_1, \\ y = y_1, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(1) \qquad By_1 - DAa = 0, \qquad Ax_1 + B''y_1 = 0.$$

Ceci posé, l'angle φ des deux génératrices infiniment voisines a pour valeur a aux infiniment petits du second ordre près; et la plus courte distance de ces deux droites est à la même approximation y_1.

Par conséquent, le paramètre de distribution p des plans tangents de l'hyperboloïde relatif à la génératrice oz a pour valeur $\frac{y_1}{a}$, c'est-à-dire, en tenant compte des relations (1),

$$p = D\frac{A}{B}.$$

Or soient a, b, c les demi-axes de la surface. Nous avons

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{\Theta^3}{\Delta},$$

Θ étant le résultat de la substitution des coordonnées du centre de l'hyperboloïde dans le premier membre de son équation, et Δ étant le discriminant de la partie homogène de cette équation. On a donc

$$\Delta = -AB^2, \qquad \Theta = -AD^2.$$

et, par suite,

$$a^2 b^2 c^2 = \frac{A^3 D^6}{AB^2} = \frac{A^2 D^6}{B^2},$$

$$abc = \frac{AD^3}{B},$$

et, comme nous avons vu que $p = \frac{DA}{B}$, nous voyons que le produit pD^2 est constant et égal à abc.

DÉTERMINATION DU RAYON DE COURBURE DE LA COURBE INTÉGRALE;

Par M. Maurice d'OCAGNE.

Si une courbe K, rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy, a pour équation

$$y = \varphi(x),$$

on appelle *courbe intégrale* de celle-ci une courbe ayant pour équation

$$y = \int \varphi(x)\, dx + C,$$

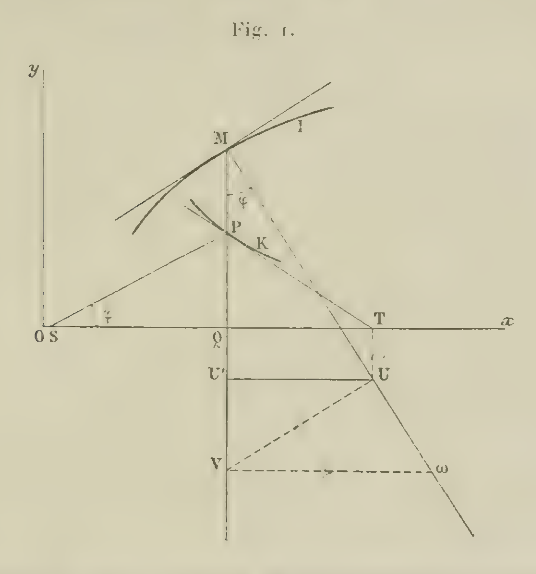
C étant une constante arbitraire. Appelons I cette courbe intégrale. On voit que sa propriété fondamentale consiste en ce que *la différence entre deux quelconques de ses coordonnées est égale à l'aire comprise entre ces coordonnées, la courbe* X *et l'axe des* x.

Cette courbe est de la plus haute importance au point de vue du calcul graphique (¹).

(¹) Consulter à cet égard l'intéressant Ouvrage intitulé : *Les intégraphes. La courbe intégrale et ses applications* (Paris, Gauthier-Villars et Fils), par M. Abdank-Abakanowicz, inventeur d'ingénieux appareils permettant de tracer mécaniquement la courbe intégrale d'une courbe quelconque dessinée sur un plan.

Si l'on mène par le point P de la courbe K (*fig.* 1) une parallèle à la tangente menée à la courbe I par le point M correspondant, on voit que QS est, à l'échelle

Fig. 1.



de la figure, égale à l'unité. Nous désignerons cette longueur QS, égale à l'unité, par la lettre *l*.

Soient, en outre :

Y l'ordonnée MQ ;
y l'ordonnée PQ ;
φ l'angle de la tangente en M à la courbe I avec Ox ;
ds l'arc infiniment petit de la courbe I au point M ;
ρ le rayon de courbure Mω de la courbe I au même point.

On a

(1) $$\rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Or

$$ds = \sqrt{dx^2 + dY^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$= \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}\, dx = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}}{l}\, dx.$$

D'autre part, puisque

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{l},$$

on a

$$d\varphi = \frac{l\, dy}{l^2 + y^2}.$$

La formule (1) devient donc

$$\rho = \frac{\sqrt{l^2 + y^2}\,(l^2 + y^2)\, dx}{l^2\, dy}$$

ou

$$M\omega = \frac{\overline{PS}^3}{\overline{QS}^2} \frac{dx}{dy},$$

ou encore, si PT est la tangente en P à la courbe K,

$$M\omega = \frac{\overline{PS}^3}{\overline{QS}^2} \frac{QT}{PQ}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure cherché en fonction des lignes données sur la figure. Cette formule peut être grandement simplifiée en vue de la construction géométrique du centre de courbure ω. En effet, elle peut s'écrire, en remarquant que $\frac{QS}{PS} = \cos \varphi$,

$$M\omega \cos^2 \varphi = PS \frac{QT}{PQ},$$

ou, en tirant ωV perpendiculaire à MQ et VU perpen-

diculaire à $M\omega$.

$$MU = \frac{QT}{\sin\varphi},$$

ou encore, en abaissant de U la perpendiculaire UU′ sur MQ,

$$UU' = QT.$$

Cette égalité montre que TU est perpendiculaire à Ox.

La construction par laquelle le centre de courbure de la courbe I se déduit de la tangente à la courbe K, construction indiquée par les lignes pointillées, est donc la suivante :

Par le point T *où la tangente à la courbe* K *coupe l'axe* Ox, *élever une perpendiculaire à cet axe jusqu'à sa rencontre, en* U, *avec la normale à la courbe* I; *par le point* U *élever une perpendiculaire à la normale* MU *jusqu'à sa rencontre, en* V, *avec l'ordonnée correspondante ; enfin par le point* V *élever à l'ordonnée* MV *une perpendiculaire qui, par sa rencontre avec la normale* MU, *donne le centre de courbure* ω *cherché.*

La construction se réduit donc au tracé des trois perpendiculaires TU à Ox, UV à MU, $V\omega$ à MV.

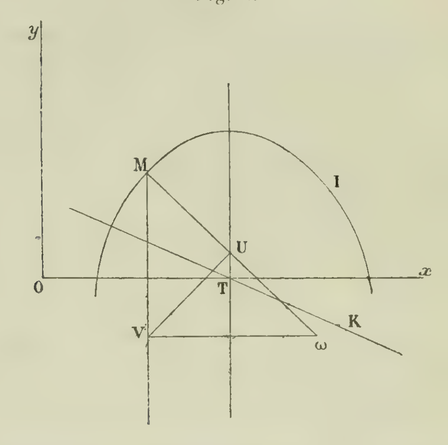
Examinons le cas où la courbe K est une droite (*fig.* 2). La courbe intégrale I est alors une parabole ayant pour axe la perpendiculaire élevée à Ox par le point T où cette droite rencontre la droite K.

L'application de la règle précédente montre que : *si* U *est le point où la normale en* M *à la parabole coupe l'axe de cette courbe, le centre de courbure* ω *répondant au point* M *s'obtient en élevant en* U *une perpendiculaire à la normale* MU *jusqu'à sa rencontre* V *avec le diamètre du point* M, *et élevant en* V *à* MV *la perpendiculaire*

V ω *qui coupe la normale* MU *au centre de courbure* ω.

C'est précisément l'application au cas de la parabole,

Fig. 2.



considérée comme une ellipse limite, de la construction du centre de courbure de cette dernière courbe donnée par M. Mannheim.

SOLUTIONS DE LA QUESTION 1572;

TP *et* TQ *sont des tangentes à une parabole de foyer* S; *la droite* TS *rencontre le cercle* TPQ *en un point* L; *prouver, par la Géométrie pure, que* TS = SL.

(R.-W. Genèse.)

1. *Solution de M. d'Ocagne.*

Considérons les cercles tangents en T, l'un à TP, l'autre à TQ, et passant respectivement par les points Q et P. En appelant S le point où se coupent ces deux

cercles, j'ai démontré dans une de mes Notes sur la symmédiane (*Nouvelles Annales*, p. 366; 1885) que la droite TS, symmédiane du triangle TPQ, coupe le cercle circonscrit à ce triangle en un point L, tel que TS = SL. Il suffit donc, pour que la proposition précédente soit démontrée, de faire voir que le point S est le foyer de la parabole tangente respectivement en P et en Q à TP et à TQ. A cet effet, tirons la médiane TM du triangle TPQ; c'est un diamètre de la parabole. D'ailleurs, on a $\widehat{QTM} = \widehat{STP}$; c'est la définition même de la symmédiane. Mais, dans le cercle TSQ, on voit que les angles STP et SQT sont égaux comme ayant même mesure. Donc $\widehat{QTM} = \widehat{SQT}$. De même $\widehat{PTM} = \widehat{SPT}$. Le point S est donc bien le foyer de la parabole.

2. *Solution de M. Ignacio Beyens,*

Capitaine du Génie à Cadix.

Soient

SX l'axe de la parabole;
PP', QQ' des parallèles à l'axe;
p, q les milieux de TP, TQ.

D'après les propriétés bien connues de la parabole, on aura

$$\text{angle TPS} = \text{HPP}' = \text{HTT}' = \text{STQ}$$

et

$$\text{angle STP} = \text{T}'\text{TQ} = \text{Q}'\text{QK} = \text{SQT}.$$

Donc les triangles STP ≡ STQ sont semblables et les médianes Sp, Sq divisent ces triangles en deux autres aussi semblables, et, par suite, nous aurons

$$p\text{S}q = p\text{ST} + \text{TS}q = q\text{SQ} + p\text{SP};$$

mais

$$qSQ = \pi - SqQ - SQT = \pi - SqQ - STP$$

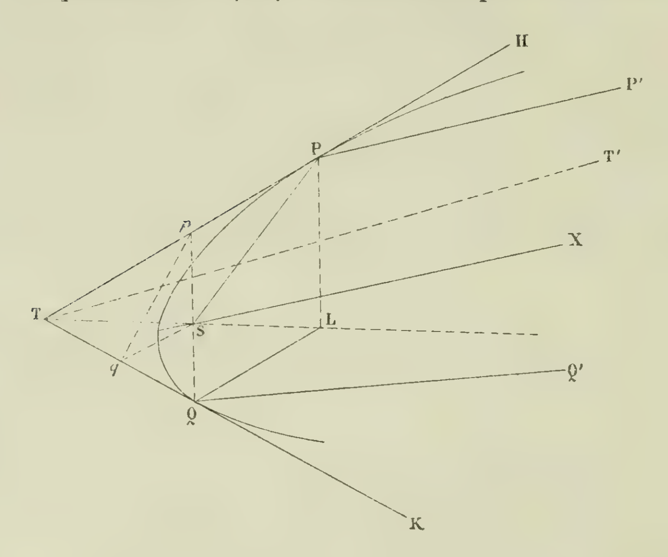
et

$$pSP = \pi - SpP - TPS = \pi - SpP - STQ\,;$$

d'où

$$pSq = TqS + TpS - pTq,$$
$$pSq + pTq = TqS + TpS.$$

Le quadrilatère $TpSq$ est donc inscriptible et le sera



aussi le quadrilatère TPLQ, formé en menant par P, Q des parallèles à Sp, Sq; mais alors $SL = ST$: donc le cercle TPQ coupe la droite TS en un point L tel que $SL = ST$. C. Q. F. D.

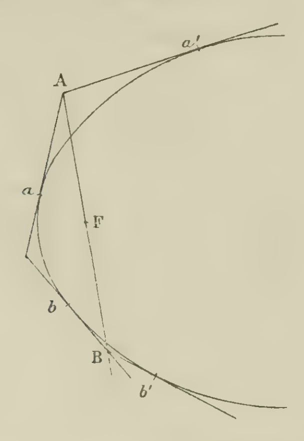
3. *Solution de M. J. Bernard,*

Élève de l'École Normale supérieure.

Le théorème de M. R.-W. Genèse peut être complété, et il fournit alors une intéressante proposition dont voici l'énoncé et la démonstration :

Étant donnée une parabole, si l'on prend deux points A *et* B (*fig.* 1) *symétriques par rapport au*

Fig. 1.



foyer F, *ces deux points, ainsi que les quatre points de contact des tangentes menées de* A *et de* B *à la parabole, sont sur un même cercle.*

Je transforme toute la figure par polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre F et de rayon arbitraire. Il suffit alors de démontrer le théorème suivant :

Étant donnés un cercle ω, *un point* F *dessus et deux droites* (α) *et* (β) *parallèles,* équidistantes *de* F, *ces deux droites, ainsi que les quatre tangentes au cercle aux quatre points où* (α) *et* (β) *le rencontrent, sont tangentes à une même conique de foyer* F.

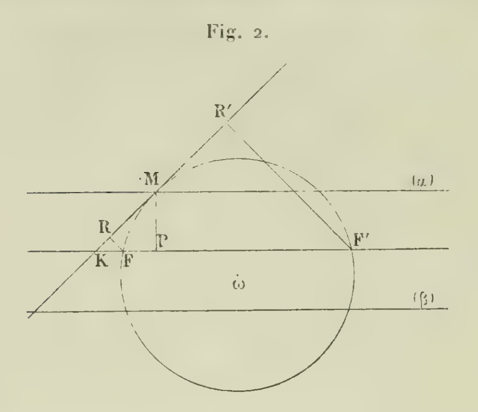
Menons par F (*fig.* 2) la parallèle à (α) et (β) : elle détermine sur ω un second point F′. Abaissons de M la perpendiculaire MP sur FF′, puis projetons F et F′ en R et R′ sur la tangente en M.

Je dis que

$$\overline{FR}.\overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

Soit K le point d'intersection de RR' et de FF'.

Fig. 2.



Les triangles semblables

$$\begin{cases} KRF, \\ KPM, \end{cases} \qquad \begin{cases} KR'F', \\ KPM \end{cases}$$

donnent

$$\frac{FR}{MP} = \frac{KF}{KM}, \qquad \frac{F'R'}{MP} = \frac{KF'}{KM}.$$

Multipliant membre à membre, j'obtiens

$$\overline{FR}.\overline{F'R'} = \overline{MP}^2.$$

En considérant la tangente en N, on aurait un résultat analogue.

Donc les droites (α) et (β), les tangentes en M et en N et, par raison de symétrie, les tangentes en M' et en N' enveloppent une conique de foyers F et F'.

Le théorème se trouve donc démontré.

On en déduit immédiatement quelques conséquences intéressantes.

Ainsi, considérons une ellipse fixe et tous les cercles qui passent par les deux foyers F et F'.

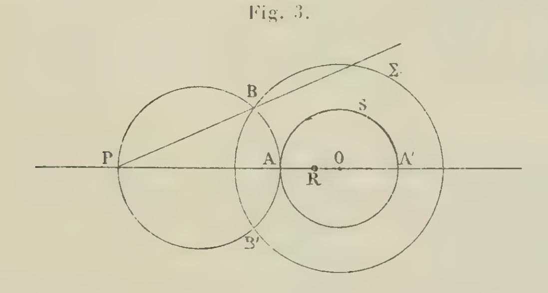
Menons les tangentes communes à l'ellipse et à un des cercles de la série. Les points de contact de ces tangentes avec le cercle sont sur les tangentes à l'ellipse aux extrémités du petit axe.

Ce théorème faisait partie du problème posé en 1885 aux candidats à l'École Polytechnique.

On peut en déduire le théorème suivant :

Soient Σ *et* S *deux cercles concentriques de rayons a et c* $(a > c)$ *et un diamètre fixe* OP. *Prenons sur ce diamètre un point variable* P *et décrivons sur* PA

Fig. 3.



comme diamètre un cercle qui coupe le cercle Σ *en* B *et* B'. *Joignons* PB *et prenons le point* R *conjugué harmonique de* P *par rapport à* A *et* A'. *La distance de* R *à la droite* PB *est constante et égale à* $\sqrt{a^2 - c^2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1584. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres qui tendent, en décroissant, vers zéro, et $b_1, b_2, b_3, \ldots$ des nombres positifs,

qui croissent toujours. Démontrer que, si la série

$$a_1 b_1 + a_2(b_2 - b_1) + a_3(b_3 - b_2) + \dots$$

est divergente, il en est de même de la série

$$(a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) b_2 + (a_3 - a_4) b_3 + \dots .$$

(CESARO.)

1585. Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ une série divergente, dont les termes tendent, en décroissant, vers zéro. Démontrer que, si la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \dots$$

est convergente, la moyenne arithmétique des n premiers nombres ε ne peut avoir d'autre limite que zéro, lorsque n croît à l'infini. (CESARO.)

1586. Démontrer que les droites joignant le sommet d'un cône aux centres des sphères osculatrices d'une trajectoire oblique des génératrices sont rencontrées et partagées dans un rapport constant par les rectifiantes de la trajectoire.

(CESARO.)

1587. On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné est une courbe du quatrième degré. Démontrer que, si d'un point quelconque de cette courbe on abaisse les quatre normales à l'ellipse, réelles ou imaginaires, et si N_1, N_2, N_3, N_4 sont les distances du point aux pieds des normales, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

1588. Si, d'un point quelconque du plan d'une ellipse quelconque, on abaisse les quatre normales à l'ellipse, si N_1, N_2, N_3, N_4 sont les distances du point aux pieds des normales, et ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - N_1} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - N_2} + \frac{\rho_3}{\rho_3 - N_3} + \frac{\rho_4}{\rho_4 - N_4} = 2.$$

(E. BARISIEN.)

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1887 [1];

Par M. Maurice d'OCAGNE.

1° Lorsqu'on passe d'un carré au suivant dans la même file oblique, l'ordonnée augmente d'une unité, l'abscisse diminue d'une unité; donc la somme $x+y$ est constante pour les carrés d'une même file. D'ailleurs, si k est le rang de la file, on a, pour le premier carré de cette file,

$$x = k, \qquad y = 1;$$

par suite,

$$(1) \qquad x + y = k + 1.$$

En outre, lorsqu'on passe ainsi d'un carré au suivant, le numéro z augmentant aussi d'une unité, la différence $z - y$ est constante pour tous les carrés de la même file.

Appelons z_k le numéro du premier carré de la file k; nous aurons

$$z - y = z_k - 1.$$

On a d'ailleurs

$$z_1 = 1,$$
$$z_2 = z_1 + 1,$$
$$z_3 = z_2 + 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_k = z_{k-1} + k - 1.$$

(1) Nous ne reproduisons pas l'énoncé, qui est fort long, et que l'on retrouvera à la page 426 du Tome précédent (Tome VI de la 3e série; 1887).

et, en additionnant,

$$z_k = 1 + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Donc

(2) $$z - y = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Les formules (1) et (2) donnent immédiatement z lorsqu'on connaît x et y. Ainsi, pour $x = 27$, $y = 41$, on a

$$k = 67,$$
$$z = 2252.$$

2° Pour résoudre la question inverse, il faut déterminer k lorsque z est connu. Or, si le carré numéroté z est dans la file de rang k, on a nécessairement

$$z_k \leqq z < z_{k+1}$$

ou

$$1 + \frac{k(k-1)}{2} \leqq z < 1 + \frac{(k+1)k}{2}$$

ou encore

$$k(k-1) \leqq 2(z-1) < (k+1)k.$$

Or, les racines de l'équation

$$k^2 - k - 2(z-1) = 0$$

étant

$$\frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{1+8(z-1)}}{2},$$

la première inégalité exige que

$$\frac{1-\sqrt{1+8(z-1)}}{2} \leqq k \leqq \frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}.$$

De même, si nous prenons les racines de l'équation

$$k^2 + k - 2(z-1) = 0,$$

nous voyons que la seconde inégalité entraîne

$$k < \frac{-1-\sqrt{1+8(z-1)}}{2}$$

ou

$$k > \frac{-1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}.$$

L'examen de ces quatre inégalités montre qu'il faut que

$$\frac{-1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2} < k \leqq \frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}.$$

Il est bien clair, d'après cela, que si $E(u)$ représente, suivant l'usage, le plus grand entier contenu dans la quantité u, on a

$$(3) \qquad k = E\left[\frac{1+\sqrt{1+8(z-1)}}{2}\right].$$

Dès lors, quand on connaît z, les formules (1), (2) et (3) donnent x et y.

Ainsi, soit $z = 248$. On a, d'après (3),

$$k = E\left(\frac{1+\sqrt{1977}}{2}\right) = 22;$$

d'après (2),

$$y = 248 - \frac{22 \times 21}{2} = 17;$$

d'après (1),

$$x = 23 - 17 = 6.$$

3° Nous avons vu que, pour tous les carrés de la $k^{\text{ième}}$ file, la somme $x+y$ des coordonnées est égale à $k+1$. Elle est donc paire pour toutes les files de rang impair.

Cela posé, n étant le numéro du carré auquel on s'arrête, la formule (3) (où l'on remplace z par n) fait connaître le rang k de la file qui contient ce carré.

Soit $2\nu - 1$ *le plus grand nombre impair inférieur et* NON ÉGAL *à* k.

Les carrés pour lesquels $x + y$ est pair sont en nombre 1 dans la première file, 3 dans la troisième, ..., $2\nu - 1$ dans la $(2\nu - 1)^{\text{ième}}$, ce qui fait en tout

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2.$$

Si k est pair, c'est à cela que se borne le nombre cherché. Si k est impair, il faut ajouter le nombre de carrés de la file k jusqu'à celui numéroté n inclusivement, soit, avec les notations précédentes,

$$n - z_k + 1$$

ou

$$n - \frac{k(k-1)}{2}.$$

Tous les cas possibles seront donc contenus dans la formule

$$\nu^2 + \frac{1 - (-1)^k}{2}\left[n - \frac{k(k-1)}{2}\right].$$

Par exemple, pour $n = 157$, on a

$$k = 18, \qquad \nu = 9.$$

Il y a donc 81 carrés pour lesquels la somme $x + y$ est paire parmi les 157 premiers carrés.

Pour $n = 180$, $k = 19$, $\nu = 9$. Ici, le nombre cherché est donc

$$81 + 180 - \frac{19 \times 18}{2} = 90.$$

Considérons maintenant le produit xy des coordonnées de chaque carré. Si l'une des coordonnées est paire, le produit est pair. Il en résulte que, dans chaque bande horizontale ou verticale correspondant à une coordonnée paire, tous les carrés donnent un produit xy pair. Si l'on couvre ces bandes de hachures, il saute aux

yeux que, pour une file oblique de rang pair, tous les produits xy sont pairs, et que, dans une file de rang impair $2\mu+1$, il y a μ carrés pour lesquels xy est pair. En outre, si z est le numéro d'un carré appartenant à une file de rang impair, il y a évidemment, depuis le premier carré de cette file (celui qui s'appuie sur OX) jusqu'au carré z inclusivement, autant de carrés à produit à xy pair qu'il y a d'unités dans

$$\frac{z-\frac{k(k-1)}{2}}{2}.$$

Cela posé, n étant le numéro du carré auquel on s'arrête, on détermine par la formule (3) le rang k de la file à laquelle appartient ce carré.

Supposons d'abord k pair.

Les $\mu-1$ premières files de rang pair nous donnent d'abord

$$2+4+6+\ldots+(2\mu-2)$$

carrés à produit xy pair. Les $\mu-1$ premières files de rang impair nous en donnent

$$1+2+3+\ldots+(\mu-1).$$

Cela fait en tout

$$3\frac{\mu(\mu-1)}{2}.$$

En outre, tous les carrés de la file k comportant des produits xy pairs, il y a lieu d'ajouter encore

$$n-\frac{k(k-1)}{2}$$

carrés.

Ainsi, pour $k = 2\mu$, nous avons

$$3\,\frac{\mu(\mu-1)}{2} + n - \frac{k(k-1)}{2}$$

carrés répondant à la question.

Maintenant, pour $k = 2\mu + 1$, nous avons encore les $\frac{3\mu(\mu-1)}{2}$ premiers carrés. Nous avons en outre les 2μ carrés de la file 2μ ou $k-1$ et, d'après une remarque faite plus haut, et en représentant toujours par $\mathrm{E}(u)$ la partie entière de u,

$$\mathrm{E}\left[\frac{n - \frac{k(k-1)}{2}}{2}\right]$$

carrés de la file de rang k.

Cela fait en tout

$$3\,\frac{\mu(\mu-1)}{2} + k - 1 + \mathrm{E}\left[\frac{n - \frac{k(k-1)}{2}}{2}\right].$$

Les deux cas peuvent être fondus en une même formule que voici :

$$\frac{3\,\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right)\left[\mathrm{E}\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right]}{2} + \frac{1 + (-1)^k}{2}\left[n - \frac{k(k-1)}{2}\right] + \frac{1 - (-1)^k}{2}\left\{k - 1 + \mathrm{E}\left[\frac{n - \frac{k(k-1)}{2}}{2}\right]\right\}.$$

Pour $n = 157$, $k = 18$, et l'on a

$$\frac{3 \times 9 \times 8}{2} + 157 - \frac{18 \times 17}{2} = 112$$

carrés à produit xy pair.

Pour $n = 180$, $k = 19$, $E\left[\dfrac{n - \dfrac{k(k-1)}{2}}{2}\right] = 4$; on a donc

$$\frac{3 \times 9 \times 8}{2} - 18 + 4 = 130$$

carrés à produit xy pair.

4° L'expression

$$ax + (a+2)y - 2z$$

peut, en vertu des formules (1) et (2), s'écrire

$$a(k+1) - k(k-1).$$

Elle a donc la même valeur pour tous les carrés d'une même file. Reste à trouver le rang de la file pour laquelle elle a la plus grande valeur. A cet effet, écrivons-la

$$-k^2 + (a+1)k + a.$$

Le maximum de ce trinôme du second degré a lieu, d'après une propriété bien connue, pour

$$k = \frac{a+1}{2}.$$

Si cette valeur est entière, elle répond à la question; sinon, on essaye les deux nombres entiers consécutifs qui la comprennent, et l'on prend celui des deux qui, substitué dans le trinôme, donne le résultat le plus élevé. Ainsi, pour $a = 9$, $k = 5$.

Pour $a = 10$, essayons $k = 5$ et $k = 6$. Les substitutions de ces deux valeurs donnent

$$-25 + (11 \times 5) + 10 = 40,$$
$$-36 + (11 \times 6) + 10 = 40.$$

On peut donc indifféremment choisir l'une ou l'autre.

Pour $a = 9,5$, essayons encore $k = 5$ et $k = 6$. Nous avons

$$-25 + (10,5 \times 5) + 9,5 = 37,$$
$$-36 + (10,5 \times 6) + 9,5 = 36,5.$$

Ici, il faut donc prendre $k = 5$.

Remarque. — Les trois premières parties du problème peuvent être présentées sous cet énoncé :

On considère un polynôme indéfini en α et β, ne contenant pas les puissances séparées des variables, et ordonné de la manière suivante :

$$C_{11}\alpha\beta + C_{21}\alpha^2\beta + C_{12}\alpha\beta^2 + C_{31}\alpha^3\beta + C_{22}\alpha^2\beta^2 + C_{13}\alpha\beta^3 + \ldots.$$

1° *Étant donnés les exposants de α et β dans un terme, trouver le rang de ce terme;*

2° *Étant donné le rang, trouver les exposants;*

3° *Combien y a-t-il de termes dont le degré total est pair, combien dont l'un des exposants est pair parmi les n premiers termes?*

DÉVELOPPEMENT DE L'ACCROISSEMENT D'UN POLYNOME ENTIER SUIVANT LES PUISSANCES DES ACCROISSEMENTS DES VARIABLES;

Par M. MARCHAND.

Cette question, d'un intérêt capital en Géométrie analytique, est placée dans les programmes de l'École Polytechnique immédiatement après la formule du binôme, avant les séries et les dérivées. Il semble donc qu'il y ait lieu de chercher une démonstration qui reste simple, quel que soit le nombre de variables, et qui

n'exige pas l'établissement préalable de la formule de Taylor généralisée.

Parmi les différentes méthodes que l'on peut proposer dans ce but, il en est une qui me semble présenter un intérêt particulier dans l'état actuel de la Science : elle consiste à appliquer déjà à ce problème la notation symbolique sur laquelle les savants allemands font reposer toute la théorie des invariants et covariants. L'exposition n'est guère pénible, même si l'on prend la précaution d'expliquer en détail l'esprit de la méthode.

1° *Notation symbolique.* — Soit une forme binaire d'ordre n

$$f(x_1 x_2) = a_0 x_1^n + \frac{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots.$$

Le cas particulier le plus simple est fourni par

$$(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n,$$

qu'on peut écrire, d'une manière abrégée,

$$b_x^n.$$

Si, dans une question particulière, on est conduit à une relation du premier degré par rapport aux coefficients

$$(1) \qquad \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n.$$

il est clair que l'on en déduit

$$(2) \qquad \lambda_0 b_1^n + \lambda_1 b_1^{n-1} b_2 + \ldots + \lambda_n b_2^n.$$

Comme, d'ailleurs, à deux relations de la forme (1) distinctes correspondent deux relations de la forme (2) distinctes, on peut inversement de la formule (2) supposée seule connue conclure, sans ambiguïté, la formule (1) qui lui a donné naissance.

Si donc il ne s'agit que de relations purement linéaires par rapport aux coefficients de $f(x_1, x_2)$, on peut prendre b_x^n comme représentation symbolique de ce polynôme. On entend par là que l'on effectuera les calculs avec l'expression simple $(b_1 x_1 + b_2 x_2)^n$ comme si b_1 et b_2 étaient des nombres donnés, et que l'on remplacera dans le résultat

$$\begin{array}{rcl} b_1^n & \text{par} & a_0, \\ b_1^{n-1} b_1 & \text{par} & a_1, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_2^n & \text{par} & a_n. \end{array}$$

2° *Dérivées d'un polynôme à une seule variable.* — Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h est évidemment linéaire par rapport aux coefficients. Il s'obtiendra en prenant

$$[b_1(x+h)+b_2]^n = (b_x + hb_1)^n = b_x^n + \frac{n}{1} hb_1 b_x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} h^2 b_1^2 b_x^{n-2} + \ldots.$$

Le coefficient de $\frac{h}{1}$, que l'on appellera *dérivée première*, est égal à

$$\frac{n}{1} b_x^{n-1} b_1 = \frac{n}{1}\left(b_1^n x^{n-1} + \frac{n-1}{1} b_1^{n-1} b_2 x^{n-2} + \ldots\right)$$
$$= na_0 x^{n-1} + (n-1)\frac{n}{1} a_1 x^{n-2} + (n-2)\frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-3} + \ldots.$$

On tire de là la règle ordinaire pour passer de $f(x)$ à $f'(x)$. Si le polynôme primitif est multiplié par une constante λ, on a λb_x^n et ensuite $\lambda n b_x^{n-1} b_1$; la dérivée est aussi multipliée par λ.

Si donc $nb_x^{n-1} b_1$ est la dérivée première de b_x^n, $n(n-1) b_x^{n-2} b_1^2$ sera la dérivée première de $nb_x^{n-1} b_1$.

Par conséquent, si l'on appelle *dérivée seconde* le coefficient de $\frac{h^2}{1.2}$ dans le développement, la dérivée seconde est la dérivée première de la dérivée première, etc.

Les différentielles s'obtiendraient avec une égale facilité.

3° *Dérivées partielles d'un polynôme à plusieurs variables.* — Je désignerai par $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p variables indépendantes, par $y_1, y_2, \ldots, y_p$ leurs accroissements. Par exemple, pour deux variables indépendantes (coniques), on fera $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, $y_1 = h, y_2 = k, y_3 = 0$.

Soit donc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum \frac{P_n}{P_\alpha \ldots P_\lambda} a_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda} x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_p^\lambda.$$

On posera symboliquement

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p)^n = b_x^n.$$

La dérivée partielle par rapport à l'une des variables x_1 sera, d'après sa définition, $n b_1 b_x^{n-1}$. Si λ est une constante, la dérivée de λb_x^n sera $\lambda n b_1 b_x^{n-1}$.

On vérifiera facilement l'identité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = n(n-1) b_\alpha b_\beta b_x^{n-2} = \frac{\partial f}{\partial x_\beta \partial x_\alpha}.$$

L'ordre des dérivations est donc indifférent.

La différentielle totale prend une expression symbolique très simple

$$n(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots) b_x^{n-1} = n b_y b_x^{n-1}.$$

On voit encore que, λ étant une constante, on aura

$$d(\lambda f) = \lambda \, df.$$

Par suite, la différentielle seconde, c'est-à-dire la dif-

férentielle première de la différentielle première, aura pour expression

$$n(n-1)b_y^2 b_x^{n-2},$$

la différentielle troisième, etc.

4°. *Développement général.* — Si l'on donne à x_1, x_2, ..., x_p les accroissements y_1, y_2, ..., y_p, en supposant si l'on veut

$$x_p = 1, \qquad y_p = 0,$$

on aura évidemment

$$b_1(x_1+y_1)+b_2(x_2+y_2)+\ldots = b_x + b_y,$$

$$\Delta f = (b_x+b_y)^n = b_x^n + \frac{n}{1} b_x^{n-1} b_y + \ldots.$$

D'après la définition des différentielles, ceci peut s'écrire

$$\Delta f = f + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^n f}{1.2\ldots n}.$$

L'expression des coefficients en fonction des dérivées partielles est facile à obtenir. On a

$$d^\alpha f = n(n-1)\ldots(n-\alpha+1) b_y^\alpha b_x^{n-\alpha}.$$

Soit $C b_1^{\beta_1}\ldots b_{p-1}^{\beta_{p-1}}$ un coefficient quelconque de b_y^α; il donnera dans $d^\alpha f$

$$n(n-1)\ldots(n-\alpha+1) C b_1^{\beta_1}\ldots b_{p-1}^{\beta_{p-1}} b_x^{n-\alpha} = C \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_{p-1}^{\beta_{p-1}}}.$$

On retombe sur l'expression

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} + \ldots\right)^\alpha f(xyz).$$

(*Cours d'Analyse* de M. Laurent, t. I, p. 142.)

Il est d'ailleurs bon d'observer que la forme symbolique $b_y^\alpha b_y^{n-\alpha}$ peut être conservée avec avantage en Géométrie analytique. Elle représente la polaire d'ordre α

du point $y_1 y_2 y_3$ relativement à la courbe $b''_y = 0$ et permet de résoudre les problèmes les plus usuels de la Géométrie analytique. (Voir *Leçons sur la Géométrie,* par A. Clebsch, recueillies par F. Lindemann, traduites par A. Benoît.)

NOUVEAU THÉORÈME RELATIF AUX CIRCONFÉRENCES TANGENTES;

Par M. JOFFROY.
Professeur au lycée de Nantes.

1. Avec quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 pris trois à trois je forme quatre combinaisons de cercles et je trace les huit circonférences tangentes à chaque combinaison.

J'appelle *circonférences inverses* deux circonférences telles que l'une enveloppe, en les touchant, les cercles que l'autre n'enveloppe pas en les touchant et réciproquement.

On sait que, pour chaque combinaison de trois cercles, les lignes des centres de deux circonférences directes passent par le centre radical des trois cercles. Les quatre combinaisons de cercles donnent donc lieu à seize lignes de centres formant quatre faisceaux de quatre droites.

Mon théorème consiste en ce que ces quatre faisceaux en se croisant forment huit autres faisceaux de quatre droites.

Pour faire connaître clairement ces faisceaux, j'adopte la notation suivante :

Je désigne par $C_1(C_2C_3)$ la circonférence ou le centre de la circonférence qui touche les cercles C_1, C_2, C_3

en enveloppant les cercles C_2, C_3 et je désigne par

$$[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3]$$

la ligne des centres de cette circonférence et de la circonférence inverse $(C_1)C_2C_3$.

Forment un faisceau ou concourent en un même point les quatre droites

$$[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3],$$
$$[C_1(C_2C_4)][(C_1)C_2C_4],$$
$$[C_1(C_3C_4)][(C_1)C_3C_4],$$
$$[(C_2C_3C_4)][C_2C_3C_4].$$

Concourent en un second point quatre droites que l'on désigne clairement en augmentant d'une unité les indices 1, 2, 3 et remplaçant 4 par 1 dans la notation des quatre droites précédentes.

Concourent en un troisième point quatre droites désignées en faisant le même changement aux indices des quatre dernières.

Un nouveau changement d'indices donne les noms des quatre droites d'un quatrième faisceau.

Le cinquième faisceau est le suivant :

$$[(C_1C_2C_3)][(C_1C_2C_3)],$$
$$[(C_1C_3C_4)][C_1C_3C_4],$$
$$[(C_1C_2C_4)][C_1C_2C_4],$$
$$[(C_2C_3C_4)][C_2C_3C_4].$$

Voici le sixième faisceau :

$$[C_1(C_2C_3)][(C_1)C_2C_3],$$
$$[C_4(C_2C_3)][(C_4)C_2C_3],$$
$$[C_2(C_1C_4)][(C_2)C_1C_4],$$
$$[C_3(C_1C_4)][(C_3)C_1C_4].$$

Une permutation circulaire donne le septième faisceau et une seconde permutation donne le huitième.

2. Cela posé, voici la démonstration géométrique du théorème.

Sur les quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4, qui sont dans le même plan, je décris des sphères. On fait voir aisément que les centres des sphères tangentes extérieurement à trois sphères C_1, C_2, C_3 sont dans un plan perpendiculaire au plan $C_1 C_2 C_3$ et dont la trace sur celui-ci passe par l'axe radical des cercles C_1, C_2, C_3, par le centre de la circonférence tangente extérieurement à ces cercles et par le centre de la circonférence qui les touche en les enveloppant. Cette trace est donc la ligne des centres désignée par

$$[(C_1 C_2 C_3)][C_1 C_2 C_3].$$

Soit maintenant une sphère tangente aux quatre sphères C_1, C_2, C_3, C_4.

Elle est tangente à chacune des combinaisons de cercles suivantes :

$$\begin{array}{lll} C_1, & C_2, & C_3, \\ C_1, & C_2, & C_4, \\ C_1, & C_3, & C_4, \\ C_2, & C_3, & C_4; \end{array}$$

donc son centre est sur quatre plans perpendiculaires au plan $C_1 C_2 C_3 C_4$. Ces plans se coupent donc suivant une normale à celui-ci et leurs traces sur celui-ci, c'est-à-dire les quatre lignes des centres

$$\begin{array}{l} [(C_1 C_2 C_3)][C_1 C_2 C_3], \\ [(C_1 C_2 C_4)][C_1 C_2 C_4], \\ [(C_1 C_3 C_4)][C_1 C_3 C_4], \\ [(C_2 C_3 C_4)][C_2 C_3 C_4], \end{array}$$

concourent en un même point et constituent le huitième faisceau.

Pour trouver les trois autres faisceaux, j'imagine une

sphère tangente laissant une sphère sur les quatre ou deux sphères sur les quatre en dehors d'elle. Le centre de cette sphère tangente aux quatre proposées est sur quatre plans se coupant suivant une droite et coupant le plan $C_1C_2C_3C_4$ suivant quatre lignes de centres concourantes.

CALCUL DE SOUS-INVARIANTS;

PAR M. E. CESARO.

M. d'Ocagne a observé que, si l'on considère a_0 comme fonction d'une variable fictive ξ, dont les dérivées successives seraient a_1, a_2, a_3, ..., l'expression

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{d\xi^p}$$

est un sous-invariant de la forme binaire, représentée symboliquement par $(x + ay)^n$. L'emploi de l'algorithme isobarique

$$\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\, \varepsilon_r,$$

exprimant la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots\varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = p$ en nombres entiers et positifs, permet d'obtenir aisément l'expression de φ_p. En effet, la formule générale pour la dérivation des fonctions de fonction, que nous avons donnée dans ce Journal (p. 46, § 13; 1885), devient, dans le cas actuel,

$$\varphi_p = p! \sum_{i=1}^{i=p} \left[(-1)^{i-1} \frac{a_0^{p-i}}{i} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left(\frac{a_r}{r!} \right) \right].$$

Il est facile de démontrer le théorème de M. d'Ocagne en partant de la dernière expression et en utilisant la formule connue, presque évidente,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_\nu} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \varepsilon_r = i \mathop{\mathrm{S}}_{p-\nu}^{i-1} \varepsilon_r.$$

On a d'abord

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial a_\nu} = \frac{p!}{\nu!} \sum_{i=1}^{i=p} \left[(-1)^{i-1} a_0^p \; i \mathop{\mathrm{S}}_{p-\nu}^{i-1} \left(\frac{a_r}{r!}\right) \right],$$

et l'on voit que le coefficient de $(-1)^i p! a_0^{p-i}$ dans

$$a_0 \frac{\partial \varphi_p}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi_p}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi_p}{\partial a_3} + \ldots + p a_{p-1} \frac{\partial \varphi_p}{\partial a_p}$$

est

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p-1}^{i} \left(\frac{a_r}{r!}\right) - \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \left[\frac{a_\nu}{\nu!} \mathop{\mathrm{S}}_{p-\nu-1}^{i-1} \left(\frac{a_r}{r!}\right) \right].$$

Cette expression est identiquement nulle, à cause de la relation évidente

$$\mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} = \varepsilon_1 \mathop{\mathrm{S}}_{p-1}^{i-1} + \varepsilon_2 \mathop{\mathrm{S}}_{p-2}^{i-1} + \varepsilon_3 \mathop{\mathrm{S}}_{p-3}^{i-1} + \ldots$$

Donc

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \nu a_{\nu-1} \frac{\partial \varphi_p}{\partial a_\nu} = 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Inversement, il est facile d'exprimer les nombres a au moyen des nombres φ. En introduisant la fonction symbolique $e^{a\xi}$, on peut écrire

$$\varphi_p = a_0^p \left(\frac{d^p l e^{a\xi}}{d\xi^p} \right)_{\xi=0},$$

d'où l'on déduit

$$e^{a\xi} = a_0 e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}}}.$$

Donc

$$a_p = a_0 \left(\frac{d^p e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}}}}{d\xi^p} \right)_{\xi=0}$$

ou bien, en vertu de la formule de dérivation invoquée plus haut,

$$a_p = \frac{p!}{a_0^{p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{1}{i!} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left(\frac{\varphi_r}{r!} \right) \right].$$

M. d'Ocagne s'est également préoccupé des relations qui existent entre les sous-invariants φ_p et les sous-invariants principaux définis, comme on sait, par les égalités symboliques

$$v_{2p} = \tfrac{1}{2}(a - a)^{2p}, \qquad v_{2p+1} = a_0 v'_{2p} - 2 a_1 v_{2p}.$$

Les relations dont il s'agit sont faciles à découvrir. Si l'on commence par limiter la recherche aux ν à indice pair, en supposant que les ν à indice impair soient nuls, on a

$$e^{\nu\xi} = \tfrac{1}{2}\, e^{(a-a)\xi} = \frac{a_0^2}{2}\, e^{e^{\frac{\varphi\xi}{a_0}} + e^{-\frac{\varphi\xi}{a_0}}};$$

puis

$$v_{2p} = (2p)!\, \frac{a_0^2}{2} \sum_{i=1}^{i=2p} \left\{ \frac{1}{i!} \mathop{\mathrm{S}}_{2p}^{i} \left[\frac{1 + (-1)^r}{a_0^r} \, \frac{\varphi_r}{r!} \right] \right\}.$$

Or on a, évidemment,

$$\mathop{\mathrm{S}}_{2p}^{i} \left\{ [1 + (-1)^r]\, \varepsilon_r \right\} = 2^i \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \varepsilon_{2r}.$$

Donc

$$v_{2p} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

On trouve, de même,

$$\varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i-p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{a_0^{2p-2i}}{i} \mathop{\mathrm{S}}_{p}^{i} \left[\frac{c_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

Ce sont là les formules prévues par M. d'Ocagne dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (11e année, p. 317).

SUR LE CRITÈRE DE GALOIS CONCERNANT LA RÉSOLUBILITÉ DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES PAR RADICAUX;

PAR M. J. DOLBNIA,
Ingénieur des Mines à Nijni-Novgorod.

1. Il est bien connu que les racines de l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0$$

s'expriment par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x_0 = R_1^{\frac{1}{3}} + R_2^{\frac{1}{3}}, \\ x_1 = \alpha R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha^2 R_2^{\frac{1}{3}}, \\ x_2 = \alpha^2 R_1^{\frac{1}{3}} + \alpha R_2^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$$

où R_1, R_2 sont les racines de l'équation

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Abel, le premier, a remarqué (1) que les racines de chaque équation algébrique irréductible, résoluble par

---

(1) *Œuvres complètes*, t. II, p. 222; 1881.

radicaux, sont exprimables par des formules semblables à (1). Dans un des Mémoires posthumes *Sur la résolution algébrique des équations*, Abel a donné ([1]), sans démonstration, le théorème suivant :

Si l'équation de premier degré n est résoluble par radicaux, ses racines sont exprimables par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} x_0 = n\left(R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right), \\ x_1 = n\left(\alpha R_1^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 R_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + \alpha^{n-1} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = n\left(\alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} R_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + \alpha R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right), \end{cases}$$

où $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ *sont les racines d'une équation du degré* $(n-1)$ *dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des coefficients de la proposée.*

La vérité de ces formules a été démontrée par Malmsten dans le Tome XXXIV du *Journal de Crelle* ([2]).

2. La connaissance plus exacte des propriétés des fonctions $R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, \ldots, R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$ s'acquiert à l'aide des théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si nous donnons à* $R_1^{\frac{1}{n}}$ *la forme de fonction rationnelle des racines* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, *la substitution* $\begin{pmatrix} z+k \\ z \end{pmatrix}$ *réduit cette fonction à* $\alpha^k R_1^{\frac{1}{n}}$.

Démonstration. — Du système (2), on déduit

$$(3)\quad R_1^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \ldots + \alpha^{n-k} x_k + \ldots + \alpha x_{n-1} + \ldots.$$

([1]) *Œuvres complètes*, t. II, p. 217-243.

([2]) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 657; 1886.

En appliquant à cette équation la substitution $\begin{pmatrix} z-k \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} S_k\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = x_k + \alpha^{n-1}x_{k-1} + \ldots \\ + \alpha^{n-i}x_{k-i} + \ldots + \alpha x_{k-1} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

où $S_k = \begin{pmatrix} z+k \\ z \end{pmatrix}$. En multipliant les deux membres de (3) par α^k, on obtient

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^k R_1^{\frac{1}{n}} = \alpha^k x_0 + \alpha^{k-1}x_1 + \alpha^{k-2}x_2 + \ldots \\ + x_k + \alpha^{n-1}x_{k+1} + \ldots + \alpha^{k-1}x_{n-1} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

En comparant (4) et (5), on trouve

$$S_k\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = \alpha^k R_1^{\frac{1}{n}} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

3. *Corollaire.* — En désignant $\begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix} = S$, nous avons

$$S\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = \alpha R_1^{\frac{1}{n}},$$
$$S^2\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = \alpha^2 R_1^{\frac{1}{n}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S^{n-1}\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}};$$

d'où il suit que, si nous appliquons les divers degrés de substitution circulaire $S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$ à $R_1^{\frac{1}{n}}$, nous aurons la série

$$(6)\qquad R_1^{\frac{1}{n}},\quad \alpha R_1^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^2 R_1^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}}.\quad \ldots.$$

En général, les divers degrés de substitution $S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$

donnent à $R_i^{\frac{1}{n}}$ la série des valeurs suivantes :

$$R_i^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^i R_i^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{2i} R_i^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{n-i} R_i^{\frac{1}{n}}.$$

4. Théorème II. — *Si nous appliquons la substitution* $T = \begin{pmatrix} kz \\ z \end{pmatrix}$ *à* $R_1^{\frac{1}{n}}$, *nous aurons*

$$T\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_i^{\frac{1}{n}},$$

où i *satisfait à la congruence*

$$ki \equiv 1 \pmod{n}.$$

Démonstration. — En appliquant la substitution $T = \begin{pmatrix} kz \\ z \end{pmatrix}$ à la fonction

$$R_1^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \ldots + \alpha^{n-i} x_i + \ldots + \alpha x_{n-1},$$

nous aurons

$$T\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = x_0 + \alpha^{n-1} x_k + \alpha^{n-2} x_{2k} + \ldots + \alpha^{n-i} x_{ki} + \ldots + \alpha x_{n-k}.$$

Soit

$$ki \equiv 1 \pmod{n};$$

alors

$$2ki \equiv 2,\qquad 3ki \equiv 3,\qquad \ldots.$$

Par conséquent,

$$(7)\qquad T\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = x_0 + \alpha^{n-i} x_1 + \alpha^{n-2i} x_2 + \ldots + \alpha^i x_{n-1}.$$

Mais, de l'équation (2), on déduit

$$(8)\qquad R_i^{\frac{1}{n}} = x_0 + \alpha^{n-i} x_1 + \alpha^{n-2i} x_2 + \ldots + \alpha^i x_{n-1}.$$

En comparant (7) et (8), on obtient

$$T\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_i^{\frac{1}{n}}$$ C. Q. F. D.

5. *Corollaire.* — Soit ρ la racine primitive du nombre premier n; alors $\rho^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, tous les autres degrés de ρ sont congrus avec les nombres $2, 3, 4, \ldots, n-1$. Posons

$$\rho^{n-2} \equiv a, \qquad \rho^{n-3} \equiv b, \qquad \ldots, \qquad \rho^2 \equiv k \qquad (\mathrm{mod}\ n),$$

où $a, b, c, \ldots, k$ sont les divers termes de la suite $2, 3, \ldots, \rho-1, \rho+1, \ldots, \overline{n-1}$. Posons $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$. En appliquant successivement tous les degrés de T, nous aurons

$$T\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_a^{\frac{1}{n}},$$

$$T^2\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_b^{\frac{1}{n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T^{n-2}\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_\rho^{\frac{1}{n}},$$

$$T^{n-1}\left(R_1^{\frac{1}{n}}\right) = R_1^{\frac{1}{n}},$$

où les indices $a, b, c, \ldots, k$ sont les résidus minimum de $\rho^2, \rho^3, \ldots, \rho^{n-2}$, suivant le module n.

De cette manière, nous verrons que les différents degrés de substitution T donnent la série

$$T\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) = R_{ai}^{\frac{1}{n}},$$

$$T^2\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) = R_{bi}^{\frac{1}{n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$T^{n-2}\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) = R_{\rho i}^{\frac{1}{n}},$$

$$T^{n-1}\left(R_i^{\frac{1}{n}}\right) = R_i^{\frac{1}{n}}.$$

6. A l'aide des deux substitutions $S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$ et

$T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$, nous formerons la Table suivante :

$$(9)\quad \begin{cases} 1, & S, & S^2, & \ldots, & S^{n-1}, \\ T, & ST, & S^2T, & \ldots, & S^{n-1}T, \\ T^2, & ST^2, & S^2T^2, & \ldots, & S^{n-1}T^2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ T^{n-2}, & ST^{n-2} & S^2T^{n-2}, & \ldots, & S^{n-1}T^{n-2}. \end{cases}$$

La table (9) constitue *un système conjugué* [1]. Les substitutions de ce système, étant appliquées successivement à $R_1^{\frac{1}{n}}$, donnent à cette fonction les $n(n-1)$ valeurs suivantes :

$$(A)\quad \begin{cases} R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha^2 R_1^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}}, \\ R_a^{\frac{1}{n}}, & \alpha^a R_a^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{2a} R_a^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & \alpha^{n-a} R_a^{\frac{1}{n}}, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \alpha^\rho R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{2\rho} R_\rho^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & \alpha^{n-\rho} R_\rho^{\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

7. Théorème III. — *Les substitutions qui n'altèrent pas la fonction $R_1^{\frac{1}{n}}$ constituent un système conjugué dont l'ordre est*

$$M = 1, 2, 3, \ldots, (n-2);$$

ce système se compose de toutes les substitutions qui n'altèrent pas les deux racines : x_0 et encore une certaine racine x_k.

Démonstration. — En appliquant à $R_1^{\frac{1}{n}}$ tous les degrés de substitution $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$, nous aurons les $(n-1)$ valeurs différentes de cette fonction qui sont renfermées

---

(1) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 268-271; 1886.

dans la série

(10) $R_1^{\frac{1}{n}}, \quad R_2^{\frac{1}{n}}, \quad R_3^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots, \quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots.$

Les substitutions 1, T, T^2, ..., T^{n-2} n'altèrent pas l'indice $z = 0$. D'autre part, si à l'équation

$$x_0 = R_1^{\frac{1}{n}} + R_2^{\frac{1}{n}} + \ldots + R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

nous appliquons toutes les substitutions possibles des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, la racine x_0 n'est pas altérée par cette opération. D'où il suit que toutes les substitutions de racines $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ donnent à $R_1^{\frac{1}{n}}$ les $(n-1)$ valeurs différentes. Le nombre des substitutions des racines de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ est exprimable par le produit $N = 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$. Ces substitutions forment un système conjugué qu'on peut former de la manière suivante. Du nombre général n des racines de l'équation proposée nous excluons x_0, et encore une racine à volonté, par exemple x_1; de toutes les autres $(n-2)$ racines,

(11) $x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$

nous formons tous les arrangements possibles semblables à (11). Le nombre de tels arrangements est égal au produit

$$M = 1, 2, 3, \ldots, (n-2).$$

Nommons les substitutions à l'aide desquelles nous recevons tous les M arrangements par

(12) $1, U_1, U_2, \ldots, U_{M-1}.$

Les substitutions (12) constituent un système conjugué qui n'altère pas les deux indices 0 et 1. Des deux systèmes conjugués (1, T, T^2, ..., T^{n-2}) et (12), for-

mons la Table

$$
(13)\quad \left\{ \begin{array}{lllll}
1, & T, & T^2, & \ldots, & T^{n-2}, \\
U_1, & U_1 T, & U_1 T^2, & \ldots, & U_1 T^{n-2}, \\
U_2, & U_2 T, & U_2 T^2, & \ldots, & U_2 T^{n-2}, \\
\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
U_{M-1}, & U_{M-1} T, & U_{M-1} T^2, & \ldots, & U_{M-1}, T^{n-2}.
\end{array} \right.
$$

Ce Tableau renferme les $(n-1)$ M substitutions parmi lesquelles ne peuvent être deux substitutions égales, car l'équation

$$U_\alpha T^\beta = U_{\alpha'} T^{\beta'}$$

entraîne l'égalité

$$(14)\qquad T^{(\beta-\beta')} = U_\alpha^{-1} U_{\alpha'},$$

ce qui ne peut être, parce que le produit $U_\alpha^{-1} U_{\alpha'}$ transforme au plus les $(n-2)$ indices, alors que la substitution $T^{(\beta-\beta')}$ transforme tous les indices, excepté les zéros. D'où il suit que la Table (13) renferme

$$[1, 2, 3, \ldots, (n-1)]$$

substitutions diverses qui ne transforment pas x_0 et qui constituent un groupe dont l'ordre est

$$N = 1, 2, 3, \ldots, (n-1).$$

Il est facile de prouver que, dans chaque ligne horizontale du Tableau (13), il y a seulement une substitution qui n'altère pas $R_1^{\frac{1}{n}}$. En effet, admettons que dans la ligne

$$U_\alpha,\quad U_\alpha T,\quad U_\alpha T^2,\quad \ldots$$
$$U_\alpha T^k,\quad \ldots,\quad U_\alpha T^l,\quad \ldots,\quad U_\alpha T^{n-2}$$

il y ait deux substitutions $U_\alpha T^k$ et $U_\alpha T^l$ qui n'altèrent pas $R_1^{\frac{1}{n}}$. Dans cette hypothèse, la substitution

$$(U_\alpha T^l)^{-1} = T^{-l} U_\alpha^{-1}$$

n'altère pas $R_1^{\frac{1}{n}}$; par conséquent, le produit

$$T^{-l}U_\alpha^{-1}, \quad U_\alpha T^k = T^{k-l}$$

n'altère pas non plus $R_1^{\frac{1}{n}}$, ce qui ne peut être. De là suit qu'il existe

$$M = 1, 2, 3, \ldots, (n-2)$$

diverses substitutions qui n'altèrent pas $R_1^{\frac{1}{n}}$. Ces substitutions ont les formes

$$U_\alpha T^\beta,$$

où

$$\alpha \leq M-1, \qquad \beta \leq n-2,$$

et évidemment constituent un système conjugué (¹).

D'après les théorèmes bien connus de MM. Bertrand et Serret (²), nous connaissons que, si l'ordre de système conjugué de $(n-1)$ lettres est égal au produit $1, 2, 3, \ldots, (n-2)$, le système se compose des substitutions formées avec $(n-2)$ lettres; d'où il suit que le système conjugué qui n'altère pas $R_1^{\frac{1}{n}}$ se compose de toutes les substitutions qui n'altèrent pas x_0, et encore l'une des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. C. Q. F. D.

8. *Remarque nécessaire.* — Les théorèmes de MM. Bertrand et Serret dont nous nous sommes servis admettent une exception quand $n = 7$. Dans ce cas, $n-1 = 6$, et alors, outre le système qui renferme toutes les substitutions de cinq lettres, on peut encore former un système de même ordre qui contient les substitutions circulaires des ordres 4, 5, 6. Il est bien compréhensible

---

(¹) SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 386; 1886.

(²) *Ibid.*, t. II, p. 296.

que ce dernier groupe ne peut satisfaire aux conditions du théorème III. En effet, le groupe d'ordre 120, qui fait exception aux théorèmes de MM. Bertrand et Serret, renferme la substitution circulaire

$$\Phi = (x_1, x_5, x_2, x_3, x_4, x_6) \quad (^1).$$

En remarquant que 3 est la racine primitive du nombre premier 7, posons

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 3z \\ z \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} 9z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2, & x_4, & x_6, & x_1, & x_3, & x_5 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \end{pmatrix},$$

où

$$\mathrm{T}^2 = (x_1, x_2, x_4)(x_3, x_6, x_5).$$

Il est clair que

$$\Phi^2 = \mathrm{T}^2;$$

par conséquent, le groupe qui renferme les substitutions circulaires des ordres 4, 5, 6 ne peut être identique au groupe du même ordre, dont toutes les substitutions n'altèrent pas $\mathrm{R}_1^{\frac{1}{n}}$.

9. Raisonnant comme ci-dessus, nous verrons que le groupe qui n'altère pas $\alpha^{pk}\mathrm{R}_k$ se compose des $\mathrm{M} = 1, 2, \ldots, (n-2)$ substitutions qui ne transforment pas x_p, et encore une certaine racine x_q.

10. Théorème IV. — *Chaque fonction de la forme $\alpha^k \mathrm{R}_l^{\frac{1}{n}}$ est exprimable rationnellement par deux racines de l'équation proposée convenablement choisie.*

Démonstration. — Prenons l'une des fonctions

---

(1) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 311 ; 1866.

données $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$. Cette fonction n'est pas altérée par toutes les substitutions possibles des racines

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_k, \quad \ldots, \quad x_l, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

excepté x_k et encore une certaine racine x_l; par conséquent, $\alpha^{kp} R_p^{\frac{1}{n}}$ est une fonction entière, rationnelle et symétrique des racines de l'équation

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots \\ \qquad \times (x - x_{l-1})(x - x_{l+1})\ldots(x - x_{n-1}) = 0. \end{array} \right.$$

Si

$$(16) \qquad f(x) = 0$$

est l'équation proposée, la fonction $\alpha^{pk} R_p^{\frac{1}{n}}$ est exprimable rationnellement par les coefficients de l'équation

$$\frac{f(x)}{(x - x_k)(x - x_l)} = 0,$$

par conséquent, elle s'exprime rationnellement par x_k et x_l. C. Q. F. D.

11. Théorème V. — *Chaque racine de l'équation proposée s'exprime rationnellement par chacune des fonctions* (A) (nº 5), *si les racines de l'équation binôme* $\alpha^n - 1 = 0$ *sont rationnellement connues.*

Démonstration. — Nous avons reproduit ici les raisonnements avec lesquels Galois a démontré l'un de ses théorèmes fondamentaux ([1]). Nous savons que le groupe des substitutions d'ordre $N = 1, 2, \ldots, (n-1)$ qui ne transforment pas x_0 donnent à $R_1^{\frac{1}{n}}$ les $(n-1)$ va-

([1]) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 289-395; 1866.

leurs

$$R_1^{\frac{1}{n}},\quad R_2^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}.$$

Composons l'équation

$$(17)\qquad \left(\zeta - R_1^{\frac{1}{n}}\right)\left(\zeta - R_2^{\frac{1}{n}}\right)\cdots\left(\zeta - R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right) = 0,$$

dont les coefficients sont les fonctions symétriques des racines de l'équation

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = 0;$$

par conséquent, on peut donner à l'équation (17) la forme

$$F(\zeta, x_0) = 0.$$

L'équation proposée $f(x) = 0$ a une racine commune avec chacune des équations

$$(18)\qquad \begin{cases} F\left(R_1^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0, \\ F\left(R_2^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F\left(R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0. \end{cases}$$

Il est facile de démontrer qu'aucune des équations (18) n'a d'autre racine commune avec l'équation proposée.

C'est pourquoi nous disons que l'équation

$$(19)\qquad F\left(R_k^{\frac{1}{n}}, x\right) = 0$$

est satisfaite par la substitution x_j au lieu de x, c'est-à-dire que nous avons identiquement

$$(20)\qquad F\left(R_k^{\frac{1}{n}}, x_j\right) = 0.$$

L'équation

$$(21) \qquad F(\zeta, x_j) = 0$$

découle de (17) par la substitution circulaire $\begin{pmatrix} z+j \\ z \end{pmatrix}$; par conséquent l'équation (21), dans la forme étendue, est

$$\left(\zeta - \alpha^j R_1^{\frac{1}{n}}\right)\left(\zeta - \alpha^{2j} R_2^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\left(\zeta - \alpha^{n-j} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right) = 0.$$

Il est évident qu'à cette dernière équation la racine $\zeta = R_k^{\frac{1}{n}}$ ne satisfait pas; par conséquent, l'égalité (20) n'est pas admissible, par conséquent notre hypothèse est illusoire.

D'où il suit que chaque équation (18) n'a qu'une seule racine commune avec l'équation proposée; par conséquent, le polynôme $f(x)$ a un plus grand commun diviseur avec chacun des polynômes (18), et ce commun diviseur est un polynôme du premier degré en x. Nous chercherons ce diviseur parmi $f(x)$ et $F(\zeta, x)$; ayant obtenu le reste du premier degré en x, nous égalerons ce reste à zéro; par cela même, x se transforme en x_0, lequel s'exprime rationnellement par ζ; au lieu de ζ, nous pouvons substituer chacune des fonctions $R_1^{\frac{1}{n}}, R_2^{\frac{1}{n}}, \ldots, R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$. De la même manière, nous démontrerions que, en général, x_k s'exprime rationnellement par $\alpha^k R_1^{\frac{1}{n}}, \alpha^{2k} R_2^{\frac{1}{n}}, \ldots, \alpha^{n-k} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$. D'où il suit que chacune des racines s'exprime rationnellement par chacune des fonctions (A), n° 5. C. Q. F. D.

12. *Corollaire*. — Il résulte des théorèmes précédents que chacune des fonctions

$$R_1^{\frac{1}{n}}, \quad R_2^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots, \quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

s'exprime rationnellement l'une par l'autre. En effet, chacune de ces fonctions s'exprime rationnellement par les racines $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$; chaque racine s'exprime rationnellement par l'une quelconque des fonctions (A), n° 5; par conséquent, une fonction quelconque $R_l^{\frac{1}{n}}$ s'exprime rationnellement par $R_k^{\frac{1}{n}}$, où l et k sont des entiers arbitraires.

13. Théorème VI (Galois). — *Si une équation irréductible de degré premier n est résoluble par radicaux, les racines sont toutes exprimables en fonction rationnelle de deux quelconques d'entre elles.*

Démonstration. — Nous avons vu que chaque racine de l'équation proposée s'exprime rationnellement en chacune des fonctions (A), n° 5; chacune de ces fonctions, par exemple $R_1^{\frac{1}{n}}$, s'exprime rationnellement en fonction de deux certaines racines; par conséquent, nous aurons

$$R_1^{\frac{1}{n}} = \Psi(x_k, x_l).$$

En appliquant à cette équation toutes les substitutions de la forme $\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$, nous obtenons, pour le premier membre de l'équation, le Tableau suivant :

$$(B)\quad \left\{\begin{array}{lllll} R_1^{\frac{1}{n}}, & R_2^{\frac{1}{n}}, & R_3^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \\ \alpha R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_2^{\frac{1}{n}}, & \alpha R_3^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & \alpha R_{n-1}^{\frac{1}{n}}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \alpha^{n-1} R_1^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{n-1} R_2^{\frac{1}{n}}, & \alpha^{n-1} R_3^{\frac{1}{n}}, & \ldots, & \alpha^{n-1} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}. \end{array}\right.$$

D'autre part, toutes les valeurs possibles de Ψ sont ren-

fermées dans la Table

$$(C)\left\{\begin{array}{llll} \Psi(x_0, x_1), & \Psi(x_0, x_2), & \ldots. & \Psi(x_0, x_{n-1}), \\ \Psi(x_1, x_0), & \Psi(x_1, x_2), & \ldots. & \Psi(x_1, x_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Psi(x_{n-1}, x_0), & \Psi(x_{n-1}, x_1), & \ldots. & \Psi(x_{n-1}, x_{n-2}). \end{array}\right.$$

Exprimons x_k par x_i et y_j. Cherchons dans la Table (C) la fonction $\Psi(x_i, x_j)$; cette fonction sera égale à un des termes du Tableau (B), soit

$$\Psi(x_i, x_j) = \alpha^m R_p^{\frac{1}{n}}.$$

Comme x_k s'exprime rationnellement par $\alpha^m R_p^{\frac{1}{n}}$, la racine x_k s'exprimera rationnellement en $\Psi(x_i, x_j)$ et, par conséquent, en x_i, x_j. C. Q. F. D.

14. Théorème VII. — *La fonction*

$$R_1 = (x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1})^n$$

est la racine d'une équation abélienne du degré $(n-1)$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de celles de la proposée.

Détermination. — Les quantités R_1, R_2, ..., R_{n-1} sont les racines de l'équation

$$(22) \qquad (\zeta - R_1)(\zeta - R_2)\ldots(\zeta - R_{n-1}) = 0.$$

Démontrons, en premier lieu, que les coefficients de cette équation sont *rationnellement connus*. A cet effet, formons toutes les substitutions possibles de n racines x_0, x_1, ..., x_{n-1}; ces substitutions forment un groupe de l'ordre $(1.2.3\ldots n)$. Chaque substitution de ce groupe est équivalente au produit de quelques trans-

positions; mais la transposition (x_i, x_j) remplace la suite

$$\alpha^i R_1^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{2i} R_2^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{(n-1)i} R_{n-1}^{\frac{1}{n}}$$

par la suite

$$\alpha^j R_1^{\frac{1}{n}},\quad \alpha^{2j} R_2^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad \alpha^{(n-1)j} R_1^{\frac{1}{n}}.$$

Mais

$$\left(\alpha^{ki} R_k^{\frac{1}{n}}\right)^n = R_k.$$

Alors la transposition (x_i, x_j) remplace dans la série $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ un terme par l'autre; par conséquent, la fonction symétrique des quantités $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}$ n'est altérée par aucune transposition. D'où il suit que chaque fonction symétrique des $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ sera *rationnellement connue;* par conséquent, les coefficients de l'équation (22) seront rationnellement connus.

Démontrons, en second lieu, que les racines de l'équation (22) sont toutes exprimables rationnellement par l'une quelconque d'entre elles.

Nous avons

$$R_1 = (x_0 + \alpha^{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1})^n.$$

Comme $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont toutes exprimables rationnellement dans l'une quelconque des fonctions

$$R_1^{\frac{1}{n}},\quad R_2^{\frac{1}{n}},\quad \ldots,\quad R_{n-1}^{\frac{1}{n}},$$

la fonction R_1 peut être exprimée rationnellement, par exemple par $R_2^{\frac{1}{n}}$; par conséquent, nous aurons

$$(23)\qquad R_1 = \frac{\Phi\left(R_2^{\frac{1}{n}}\right)}{\theta\left(R_2^{\frac{1}{n}}\right)},$$

où Φ et θ sont des fonctions entières. En faisant disparaitre le dénominateur, nous aurons

$$(24)\quad R_1 = a_0 + a_1 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 R_2^{\frac{2}{n}} + a_3 R_2^{\frac{3}{n}} + \dots + a_{n-1} R_2^{\frac{n-1}{n}},$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles de R_2.

En appliquant à l'équation (24) tous les degrés de substitution $S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$, nous aurons (théorème I),

$$R_1 = a_0 + a_1 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} R_2^{\frac{n-1}{n}},$$
$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^2 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^4 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-2} R_2^{\frac{n-1}{n}},$$
$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^4 R_2^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^8 R_2^{\frac{2}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-4} R_2^{\frac{n-1}{n}},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$R_1 = a_0 + a_1 \alpha^{n-2} R_2^{\frac{1}{n}} + \dots + a_{n-1} \alpha^2 R_2^{\frac{n-1}{n}}.$$

En ajoutant ces égalités, nous trouvons

$$R_1 = a_0,$$

par conséquent R_1 s'exprime rationnellement en R_2. D'où il résulte, comme l'a remarqué, pour la première fois, Kronecker [1], que l'équation (22) se rapporte à la catégorie des équations *abéliennes* [2].

15. Théorème VIII (Galois). — *Si toutes les racines d'une équation irréductible de degré premier n sont exprimables rationnellement en fonction de deux quelconques d'entre elles, l'équation est résoluble par radicaux.*

---

(1) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. II, p. 654-664; 1886.
(2) N.-H. Abel, *Œuvres complètes*, t. I, p. 478-507; 1881.

Démonstration. — Formons la fonction

$$\Pi_1 = x_0 + \alpha^{n-1}x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \ldots + \alpha x_{n-1},$$

où α est l'une des racines de l'équation $\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$. Comme toutes les racines de l'équation $f(x) = 0$ sont exprimables rationnellement par deux racines à volonté, on peut écrire

$$(26) \qquad \Pi_1 = \varphi(x_0, x_1),$$

où φ est une fonction rationnelle.

En appliquant à l'équation (26) toutes les substitutions de la forme $\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}$ (Table IX, n° 6), nous obtenons pour Π_1 la série de valeurs

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} \Pi_1, & \alpha\Pi_1, & \alpha^2\Pi_1, & \ldots, & \alpha^{n-1}\Pi_1, \\ \Pi_a, & \alpha^a\Pi_a, & \alpha^{2a}\Pi_a, & \ldots, & \alpha^{n-a}\Pi_a, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \Pi_\rho, & \alpha^\rho\Pi_\rho, & \alpha^{2\rho}\Pi_\rho, & \ldots, & \alpha^{n-\rho}\Pi_\rho, \end{array} \right.$$

où $a, b, c, \ldots, \rho$ ont les valeurs désignées dans le n° 5. A la fonction $\varphi(x_0, x_1)$ répond la série

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \varphi(x_0, x_1), & \varphi(x_1, x_2), & \ldots, & \varphi(x_{n-1}, x_n), \\ \varphi(x_0, x_\rho), & \varphi(x_1, x_{\rho+1}), & \ldots, & \varphi(x_{n-1}, x_{\rho-1}), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots, \\ \varphi(x_0, x_a), & \varphi(x_1, x_{a+1}), & \ldots & \varphi(x_{n-1}, x_{a-1}). \end{array} \right.$$

La Table (E) contient toutes les valeurs de la fonction φ; par conséquent, la Table (D) contient toutes les valeurs de la fonction Π_1. Nommons λ l'une des racines de l'équation $\lambda^{n-1} - 1 = 0$, sans en excepter l'unité, et formons la fonction

$$(\Pi_1^n - \lambda\Pi_a^n + \lambda^2\Pi_b^n + \ldots + \lambda^{n-2}\Pi_\rho^n)^{n-1} = \theta_1 = \Phi(x_0, x_1).$$

Il est évident que $\theta_1 = \Phi(x_0, x_1)$ n'est pas altérée par la substitution $S = \begin{pmatrix} z+1 \\ z \end{pmatrix}$; en outre θ_1 n'est pas altérée par la substitution $T = \begin{pmatrix} \rho z \\ z \end{pmatrix}$, car

$$T(\Pi_1) = \Pi_a, \qquad T(\Pi_a) = T^2(\Pi_1) = \Pi_b, \qquad \ldots;$$

par conséquent,

$$\theta_1 = \frac{1}{n(n-1)}\left[\Phi(x_0, x_1) + \Phi(x_1, x_2) + \ldots + \Phi(x_{n-1}, x_{a-1})\right].$$

Il est évident que θ_1 est une fonction symétrique et rationnelle des racines x_0, x_1, x_2, $\ldots$, et par conséquent elle est rationnellement connue. Nous aurons, évidemment, les $(n-1)$ équations

$$\Pi_1^n + \Pi_a^n + \ldots + \Pi_\rho^n = \sqrt[n-1]{\theta_0},$$
$$\Pi_1^n + \lambda\Pi_a^n + \ldots + \lambda^{n-2}\Pi_\rho^n = \sqrt[n-1]{\theta_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_1^n + \lambda^{n-2}\Pi_a^n + \ldots + \lambda\Pi_\rho^n = \sqrt[n-1]{\theta_{n-2}},$$

où θ_0, θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_{n-2} sont des quantités rationnellement connues. A l'aide de ces équations, Π_1^n, Π_2^n, $\ldots$, Π_{n-1}^n s'exprimeront par des fonctions rationnelles et linéaires des $\sqrt[n-1]{\theta_0}$, $\sqrt[n-1]{\theta_1}$, $\sqrt[n-1]{\theta_2}$, $\ldots$, $\sqrt[n-1]{\theta_{n-2}}$; par conséquent, nous trouverons Π_1, Π_2, $\ldots$ par radicaux; donc nous trouverons par radicaux les racines de l'équation proposée. C. Q. F. D.

ERRATA.

Page 438, ligne 18, *au lieu de* coordonnées, *lisez* ordonnées.

» ligne 19, *au lieu de* coordonnées, la courbe X, *lisez* ordonnées, la courbe K.

SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

1. M. Aoust, dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* (1846), a trouvé pour équation de la ligne L qui coupe les lignes méridiennes d'une surface de révolution sous l'angle constant α

$$\xi = \operatorname{tang}\alpha.\sigma,$$

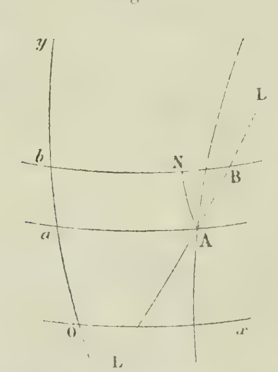
σ étant l'arc de la ligne méridienne et ξ l'arc du parallèle qui passe par le point considéré de la trajectoire.

Il est cependant facile de montrer que la trajectoire L, par rapport au système d'axes curvilignes considéré, n'est pas représentée par l'équation linéaire précédente.

A cet égard, j'espère qu'on m'excusera de publier cette Note pour rectifier cette petite inexactitude échappée à M. Aoust, dont j'ai étudié avec intérêt les Ouvrages remarquables.

Sur une surface de révolution quelconque, soient Oy

Fig. 1.



(*fig.* 1) une ligne méridienne, Ox une parallèle, A et B

deux points consécutifs de la trajectoire qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i.

Si l'on mène les parallèles Aa, Bb, on a Aa, Oa pour coordonnées de A, et Bb, Ob pour coordonnées de B. Soit AM la méridienne qui passe par le point A ; si l'on fait $b\text{N} = a\text{A}$, on a

$$\text{A}a = x, \qquad \text{B}b = x + dx,$$
$$dx = \text{B}b - \text{A}a = \text{BN} = \text{BM} + \text{MN}.$$

Si l'on désigne par R le rayon du parallèle et par ω l'angle compris entre les plans des lignes méridiennes Ob, AM, on peut écrire

$$\text{A}a = \text{R}\,\omega, \qquad \text{M}b = (\text{R} + d\text{R})\,\omega$$

et conséquemment

$$\text{MN} = \text{M}b - \text{A}a = \omega\, d\text{R}.$$

D'ailleurs

$$\text{BM} = \text{AM} \tang i = \tang i\, dy;$$

donc

$$dx = \tang i\, dy + \omega\, d\text{R}.$$

L'angle ω est défini par l'égalité

$$\omega = \frac{x}{\text{R}},$$

ce qui donne

$$dx = \tang i\, dy + x\,\frac{d\text{R}}{\text{R}}.$$

La trajectoire L est donc définie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dy} = \tang i + x\,\frac{1}{\text{R}}\,\frac{d\text{R}}{dy}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle linéaire, posons

$$(1) \qquad \frac{1}{R}\frac{dR}{dy} = \varphi(y):$$

alors

$$\frac{dx}{dy} = \tang i + x\varphi(y);$$

d'où, en intégrant,

$$(2) \qquad x = e^{\int\varphi(y)dy}\left[a + \tang i\int e^{-\int\varphi(y)dy}\,dy\right],$$

a étant une constante arbitraire.

Si l'on pose

$$\int e^{-\int\varphi(y)dy}\,dy = \psi(y),$$

on obtient

$$\varphi(y) = -\frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}$$

et, à cause de (1),

$$\frac{1}{R} = b\psi'(y), \qquad x = \frac{1}{\psi'(y)}[a + \tang i\,\psi(y)].$$

Si l'on désigne par $\theta(y)$ le second membre de la dernière égalité, on a

$$x = \theta(y), \qquad R = k\theta(y)\,e^{-\tang i\int\frac{dy}{\theta(y)}}.$$

Si $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ est le système d'axes coordonnés, R est la coordonnée ξ de la ligne méridienne à l'instant où le plan de cette ligne coïncide avec le plan coordonné $\eta = 0$; la coordonnée y de la trajectoire est l'arc s de la ligne méridienne.

On a donc ce théorème :

Si, par rapport au système d'axes curvilignes formé sur une surface de révolution par une ligne méridienne (axe des y) et par un parallèle (axe des x), la trajec-

toire qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i est représentée par l'équation

$$x = \theta(y),$$

les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne sont données par les équations

$$\xi = k\theta(s)e^{-\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{\theta(s)}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - k^2[\theta'(s) - \operatorname{tang} i]^2 e^{-2\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{\theta(s)}}}\, ds,$$

s étant l'arc de cette ligne.

2. Soient réciproquement

$$\xi = \theta(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \theta'^2(s)}\, ds$$

les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne d'une surface de révolution.

Dans ce cas $R = \theta(y)$ et, en appliquant (1),

$$\log R = \int \varphi(y)\, dy - \log b = \log \theta(y);$$

d'où

$$b\,\theta(y) = e^{\int \varphi(y) dy};$$

par conséquent,

$$\int e^{-\int \varphi(y) dy}\, dy = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{\theta(y)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (2), on obtient

$$x = \theta(y)\left[ab + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}\right].$$

On a ainsi ce théorème :

Sur la surface de révolution engendrée par la ligne méridienne

$$\xi = \theta(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \theta'^2(s)}\, ds$$

la trajectoire qui coupe les méridiennes sous l'angle constant i est représentée (par rapport au système d'axes curvilignes formé par une ligne méridienne et par une parallèle de la surface) par l'équation

$$x = \theta(y)\left[k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}\right], \tag{3}$$

k étant une constante arbitraire.

Application. — Nous allons déterminer la surface de révolution sur laquelle une loxodromie est représentée en coordonnées x, y par une équation linéaire

$$x = ay + b.$$

On doit avoir, à cause de (3),

$$ay + b = \theta(y)\left[k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}\right];$$

d'où

$$k + \operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)} = \frac{ay + b}{\theta(y)}.$$

En différentiant par rapport à y, on a

$$\frac{\operatorname{tang} i}{\theta(y)} = \frac{a\,\theta(y) - (ay + b)\theta'(y)}{\theta^2(y)};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\theta(y)}{\theta'(y)} = \frac{a - \operatorname{tang} i}{ay + b}.$$

Cette relation, par une intégration et par des calculs très faciles, nous offre

$$\theta(y) = k(ay + b)^{1 - \frac{2 \operatorname{tang} i}{a}}.$$

On a donc la propriété suivante :

La surface de révolution sur laquelle la loxodromie qui coupe les lignes méridiennes sous l'angle constant i est représentée en coordonnées x, y par l'équa-

tion linéaire

$$x = ay + b$$

est engendrée par la rotation de la courbe méridienne

$$\xi = k(as+b)^{1-\frac{\tang i}{a}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - k^2(a - \tang i)^2(as+b)^{-\frac{2\tang i}{a}}}\, ds$$

autour de l'axe des ζ.

La propriété énoncée par M. Aoust, relativement aux loxodromies des surfaces de révolution, est donc vérifiée seulement pour une classe de loxodromies (celle définie par l'angle i) de la surface de révolution que nous venons de déterminer.

3. On peut énoncer le théorème que nous venons de démontrer sous une forme remarquable.

Si les coordonnées d'un point d'une ligne plane quelconque s'expriment en fonction de l'arc de la manière suivante

$$\xi = \varphi(s), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \varphi'^2}\, ds,$$

le rayon de courbure ρ de la ligne est donné par l'égalité

$$\frac{1}{\rho^2} = \xi''^2 + \zeta''^2 = \frac{\varphi''^2}{1 - \varphi'^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{\sqrt{1 - \varphi'^2}}{\varphi''}.$$

On peut donc écrire

$$(1) \qquad \rho = \frac{\theta}{k[\theta\theta'' - (\tang i - \theta')\tang i]} \sqrt{e^{2\tang i \int \frac{ds}{\theta}} - k^2(\theta' - \tang i)^2},$$

pourvu que l'on remplace φ par la fonction

$$k\theta(s)\,e^{-\tan i\int\frac{ds}{\theta(s)}}.$$

Donc :

Pour qu'une loxodromie d'une surface de révolution soit représentée par l'équation $x=\theta(y)$, *il faut et il suffit que le rayon de courbure de la ligne méridienne s'exprime en fonction de l'arc par l'égalité* (4), k *étant une constante et* i *l'angle constant sous lequel la ligne coupe les méridiennes.*

4. Sur une surface quelconque s on appelle *loxodromie* toute ligne L qui coupe les lignes de courbure d'un système sous un angle constant i. Nous nous proposons ici de déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation d'une loxodromie d'une surface quelconque soit linéaire.

Soit

$$ds^2=\mathrm{F}\,du^2+\mathrm{G}\,dv^2$$

le carré de la distance infinitésimale entre deux points consécutifs de la surface, i l'angle (constant) sous lequel L coupe les lignes coordonnées $v=$ const., σ l'arc de L; on a

$$\cos i=\sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{du}{d\sigma},\qquad \sin i=\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dv}{d\sigma}$$

et l'équation différentielle de la ligne L peut s'écrire

$$\sqrt{\mathrm{E}}\tan i\,du=\sqrt{\mathrm{G}}\,dv.$$

Pour que cette équation donne lieu à une relation linéaire entre les variables u, v, il faut et il suffit que

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{F}}=\text{const.}$$

On a donc ce théorème :

Pour qu'une loxodromie d'une surface quelconque soit représentée par une équation linéaire en u et v, u et v étant les paramètres des lignes de courbure de la surface, il faut et il suffit que les lignes de courbure forment un double système de lignes isothermes et que les paramètres u et v soient choisis de façon que le rapport $\frac{E}{G}$ soit constant.

Les lignes de courbure d'une surface de révolution sont isothermes ; on voit donc que la loxodromie d'une telle surface peut être représentée par une équation linéaire, pourvu que l'on fasse un choix convenable des paramètres des lignes de courbure.

Si l'on désigne par σ l'arc de la ligne méridienne, par R le rayon des parallèles de la surface, par ω l'angle compris entre les plans déterminés par l'axe et deux points de la ligne considérée, on a

$$ds^2 = d\sigma^2 + R^2\,d\omega^2 = R^2\left[\left(\frac{d\sigma}{R}\right)^2 + d\omega^2\right].$$

Si l'on pose $\frac{d\sigma}{R} = dt$, on pourra regarder t comme le paramètre des parallèles de la surface ; de cette relation on déduit

$$t = \int \frac{d\sigma}{R(\sigma)} = f(\sigma),$$

$f(\sigma)$ étant une fonction convenable de σ.

De là on a

$$\sigma = \varphi(t)$$

et conséquemment R peut être considéré comme une fonction connue de t.

Donc

$$ds^2 = R^2(t)(dt^2 + d\omega^2),$$

et l'équation différentielle de la loxodromie devient

$$\operatorname{tang} i\, dt = d\omega,$$

d'où

$$\operatorname{tang} i . t = \omega + \text{const.}$$

Donc :

L'équation de la loxodromie d'une surface de révolution est linéaire par rapport aux variables t et ω que nous venons de définir.

Lorsque les lignes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. ne sont pas les lignes de courbure, on a les propriétés qu'on vient de voir pour toute ligne L qui coupe les lignes coordonnées d'un système sous un angle constant. Pour en donner une application, nous allons déterminer les surfaces réglées sur lesquelles une trajectoire isogonale des génératrices rectilignes est représentée par une équation linéaire.

Soient L une ligne quelconque à double courbure; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale; ρ le rayon de courbure, r le rayon de torsion, v l'arc de la ligne. Si l'on mène par les points de L des droites placées sur les plans normaux et inclinées de l'angle θ sur les normales principales, on a, pour les coordonnées X, Y, Z d'un point quelconque de la surface réglée engendrée,

$$X = x + u(\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\cos l),$$
$$Y = y + u(\cos\theta\cos\mu + \sin\theta\cos m),$$
$$Z = z + u(\cos\theta\cos\nu + \sin\theta\cos l),$$

x, y, z étant les coordonnées du point de L et u les portions des génératrices rectilignes comptées à partir de L.

On en déduit (pourvu que l'on applique les formules

connues de M. Serret)

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \cos\theta \cos\lambda + \sin\theta \cos l,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)\cos\alpha + u\sin\theta\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)\cos\lambda$$

$$- u\cos\theta\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)\cos l.$$

. . . .

Par conséquent,

$$E = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$F = \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

$$G = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = \left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)^2 + u^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2.$$

Le carré de la distance ds entre deux points consécutifs de la surface a donc l'expression suivante :

$$ds^2 = du^2 + \left[\left(1 - \frac{u}{\rho}\cos\theta\right)^2 + u^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2\right] dv^2.$$

La condition que les lignes $u =$ const., $v =$ const. soient isothermes équivaut à l'autre

$$G = UV,$$

U étant une fonction de u et V une fonction de v.

Or

$$G = 1 - u\,\frac{2\cos\theta}{\rho} + u^2\left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2\right]$$

et si l'on pose

$$\frac{2\cos\theta}{\rho} = V_1, \qquad \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 = V_2,$$

V_1, V_2 étant deux fonctions de v, la condition à remplir devient

$$1 - uV_1 + u^2V_2 = UV;$$

d'où

$$\log(1 - uV_1 + u^2V_2) = \log U + \log V.$$

Si l'on dérive cette égalité successivement par rapport aux variables u, v, on a

$$\frac{u^2(V_2V_1' - V_1V_2') + 2uV_2' - V_1'}{1 - uV_1 + u^2V_2} = 0.$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour toute valeur de u, il doit être

$$V_1' = 0, \qquad V_2' = 0,$$

c'est-à-dire

$$V_1 = \frac{2\cos\theta}{\rho} = -a, \qquad V^2 = \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{dv}\right)^2 = b^2,$$

a et b étant deux constantes.

On a donc

$$G = 1 + au + b^2u^2,$$

et conséquemment

$$ds^2 = du^2 + (1 + au + b^2u^2)\,dv^2.$$

Cette forme de l'expression de ds^2 caractérise des surfaces de révolution ou bien des surfaces applicables sur celles de révolution.

Donc :

Les surfaces réglées sur lesquelles les génératrices rectilignes et les trajectoires orthogonales forment deux systèmes de lignes isothermes sont caractérisées par la propriété d'être applicables sur des surfaces de révolution.

Si l'on rappelle que les surfaces réglées qu'on vient de trouver sont aussi applicables sur l'hélicoïde gauche à plan directeur, on a :

Les surfaces réglées sur lesquelles une trajectoire isogonale des génératrices rectilignes est représentée

par une équation linéaire, sont applicables sur l'hélicoïde gauche à plan directeur.

5. Si l'on a égard à la figure du n° 1, on déduit du triangle infinitésimal ABM

$$d\sigma = \mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AM}}{\cos i} = \frac{dy}{\cos i}.$$

L'angle $d\varepsilon$ de contingence géodésique d'une loxodromie placée sur une surface de révolution est donné par la formule (*voir* P. Serret, *Lignes à double courbure*)

$$d\varepsilon = -\operatorname{tang} i \,\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}};$$

et puisque

$$\mathrm{R} = k\theta(y)e^{\operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}},$$

$$d\mathrm{R} = ke^{-\operatorname{tang} i \int \frac{dy}{\theta(y)}}[\theta'(y) - \operatorname{tang} i]\,dy,$$

on a

$$-\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \frac{\operatorname{tang} i - \theta'(y)}{\theta(y)}\,dy,$$

et enfin

$$d\varepsilon = \frac{\operatorname{tang} i - \theta'(y)}{\theta(y)}\,dy \operatorname{tang} i.$$

Si donc ρ_g est le rayon de courbure géodésique de la loxodromie, on aura

$$\rho_g = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\theta(y)}{[\operatorname{tang} i - \theta'(y)]\sin i}.$$

Si l'on pose la condition

$$\rho_g = \text{const.} = a,$$

il vient

$$\frac{a \sin i\, \theta'(y)}{a \sin i \operatorname{tang} i - \theta(y)}\,dy = dy;$$

d'où par intégration

$$a \sin i \log[a \sin i \operatorname{tang} i - \theta(y)] = a \sin i \log b - y$$

et conséquemment

$$a \sin i \operatorname{tang} i - \theta(y) = b e^{-\frac{y}{a \sin i}}.$$

On en déduit

$$\theta(y) = a \sin i \operatorname{tang} i - b e^{-\frac{y}{a \sin i}}.$$

On a donc ce théorème :

Les loxodromies dont le rayon de courbure géodésique est une constante a sont placées sur une surface de révolution dont la ligne méridienne est représentée en fonction de l'arc s par les équations

$$\xi = k\left(a \sin i \operatorname{tang} i + b e^{-\frac{s}{a \sin i}}\right) e^{-\operatorname{tang} i \int \frac{ds}{a \sin i \operatorname{tang} i + b e^{-\frac{s}{a \sin i}}}},$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2}\, ds,$$

k et b étant deux constantes arbitraires et i l'angle sous lequel la loxodromie coupe les lignes méridiennes.

6. Nous allons déterminer en coordonnées x, y l'équation d'une ligne géodésique d'une surface de révolution.

L'équation

$$\operatorname{tang} i = \frac{dz}{dy} - x \frac{1}{\mathrm{R}} \frac{d\mathrm{R}}{dy},$$

que nous avons donnée au nº 1 pour une loxodromie d'une surface de révolution, est aussi applicable à toute ligne placée sur une telle surface, pourvu que l'on regarde i comme une fonction de y. Cela posé, soit L une ligne géodésique d'une surface de révolution ; le

théorème de Clairault nous donne

$$R \sin i = k,$$

k étant une constante.

De cette égalité on déduit

$$\operatorname{tang} i = \frac{k}{\sqrt{R^2 - k^2}},$$

et conséquemment l'équation différentielle de la ligne géodésique peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{R}\frac{dR}{dy}\,x = \frac{k}{\sqrt{R^2 - k^2}}.$$

La surface de révolution étant donnée, R est une fonction connue de y; (5) est une équation différentielle linéaire, et par le calcul habituel on trouve

$$x = R\left(a + k\int \frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}}\right),$$

a étant une constante. Telle est l'équation d'une ligne géodésique d'une surface de révolution, en coordonnées x, y.

Application. — Pour donner une application de la formule que nous venons de trouver, nous allons chercher les surfaces de révolution sur lesquelles une ligne géodésique est représentée, en coordonnées x, y, par une équation linéaire

$$x = my + n.$$

On doit avoir

$$R\left(a + k\int \frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}}\right) = my + n,$$

c'est-à-dire

$$a + k\int \frac{dy}{R\sqrt{R^2 - k^2}} = \frac{my + n}{R};$$

d'où par dérivation

$$\frac{k}{R\sqrt{R^2 - k^2}} = \frac{mR - (my + n)R'}{R}.$$

Cette égalité donne

$$\frac{1}{my + n} = \frac{\sqrt{R^2 - k^2}}{R(m\sqrt{R^2 - k^2} - k)} R';$$

d'où

$$\log(my + n) = \log a + m \int \frac{\sqrt{R^2 - k^2}}{R(m\sqrt{R^2 - k^2} - k)} dR.$$

Si l'on pose

$$\sqrt{R^2 - k^2} = R - t,$$

t étant une nouvelle variable, on a

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{R^2 - k^2}}{R(m\sqrt{R^2 - k^2} - k)} dR \\
&= \int \frac{(t^2 + k^2)^2 \, dt}{t(k^2 + t^2)(mt^2 + 2kt - mk^2)} \\
&= \frac{1}{m} \int \left(\frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{k^2 + t^2} + \frac{D}{t + \alpha} + \frac{E}{t + \beta} \right) dt,
\end{aligned}$$

α, β, A, B, C, D, E étant données par les égalités

$$\alpha = \frac{k}{m}(1 - \sqrt{1 + m^2}), \qquad \beta = \frac{k}{m}(1 + \sqrt{1 + m^2}),$$

$$A = -m,$$

$$B = \frac{2m^3}{1 + m^2},$$

$$C = -\frac{2km^2}{1 + m^2},$$

$$D = \frac{2(m\alpha - k)}{(1 + m^2)(\alpha - \beta)},$$

$$E = \frac{2(m\beta - k)}{(1 + m^2)(\beta - \alpha)}.$$

On a donc

$$my + n = a t^A (k^2 + t^2)^{\frac{B}{2}} (t + \alpha)^D (t + \beta)^E e^{\frac{C}{k} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{k}};$$

d'où, en observant que

$$t = \mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}, \qquad t^2 + k^2 = 2\mathrm{R}\left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right),$$

$$\begin{aligned} my + n = a\left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right)^{\mathrm{A}} (2\mathrm{R})^{\frac{\mathrm{B}}{2}} \\ \times \left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right)^{\frac{\mathrm{B}}{2}} \left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + \alpha\right)^{\mathrm{D}} \\ \times \left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + \beta\right)^{\mathrm{E}} e^{\frac{\mathrm{C}}{k} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}{k}\right)}. \end{aligned}$$

Si l'on introduit les valeurs de α, β, A, B, C, D, E, l'égalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned} my + n = h\,\mathrm{R}^{\frac{m^3}{1+m^2}} \left[\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right]^{-\frac{m}{1+m^2}} \\ \times \left[(m\mathrm{R} + k)\left(\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}\right) - 2mk^2\right]^{\frac{m}{1+m^2}} \\ \times e^{-\frac{2m^2}{1+m^2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{R} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}{k}\right)}, \end{aligned}$$

h étant une constante quelconque.

On a ainsi ce théorème :

Lorsque la ligne géodésique d'une surface de révolution est représentée en coordonnées x, y par l'équation linéaire $x = my + n$, les coordonnées ξ, ζ d'un point quelconque de la ligne méridienne s'expriment en fonction de l'arc s par les équations suivantes

$$\begin{aligned} ms + n = h\xi^{\frac{m^3}{1+m^2}} \left[\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}\right]^{\frac{m}{1+m^2}} \\ \times \left[(m\xi + k)\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}\right) - 2mk\right]^{\frac{m}{1+m^2}} \\ \times e^{-\frac{2m}{1+m^2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\xi - \sqrt{\xi^2 - k^2}}{k}\right)}, \end{aligned}$$

$$\zeta = \int \sqrt{1 - \zeta'^2\, ds},$$

h étant une constante arbitraire et k la constante qui caractérise la géodésique dans l'équation de Clairault.

Si l'on suppose $m = 0$, on a

$$x = n = \mathrm{R}\left(a + k\int \frac{dy}{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}}\right).$$

De cette équation, par des opérations analogues aux précédentes, on déduit

$$h - \frac{k}{n}y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2} + k \operatorname{arc} \sin\left(\frac{k}{\mathrm{R}}\right).$$

Par conséquent :

Lorsque la ligne géodésique d'une surface de révolution est représentée en coordonnées x, y par l'équation $x = n$, n étant une constante, les coordonnées ξ, ζ d'un point quelconque de la ligne méridienne s'expriment en fonction de l'arc s par les équations suivantes

$$h - \frac{k}{n}s = \sqrt{\xi^2 - k^2} + k \operatorname{arc} \sin\left(\frac{k}{\xi}\right), \qquad \zeta = \int \sqrt{1 - \xi'^2}\, ds,$$

h étant une constante quelconque et k la constante qui caractérise la géodésique dans l'équation de Clairault.

QUESTION PROPOSÉE.

1589. Si p, q, s désignent respectivement les droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales d'un quadrilatère, α l'angle de q avec s, β l'angle de s avec p, γ l'angle de p avec q, pour que le quadrilatère soit inscriptible au cercle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\sin 2\alpha}{p^2} + \frac{\sin 2\beta}{q^2} + \frac{\sin 2\gamma}{s^2} = 0.$$

Quelle est la signification géométrique de cette formule?

(F. Farjon.)

NOTIONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ;

Par M. SARRAU,
Membre de l'Institut.

L'exposé qui suit est la reproduction de Leçons professées à l'École Polytechnique. La théorie de l'élasticité a été récemment introduite dans les programmes de cette École et le nombre des leçons qui lui sont consacrées est nécessairement fort restreint. On a pensé qu'il ne serait pas sans intérêt pour l'enseignement de publier un résumé qui, en raison de sa brièveté même, offre l'avantage de ne présenter que les parties strictement essentielles d'une théorie dont les éléments sont épars dans un grand nombre de Traités et de Mémoires originaux.

I. — Théorie des tensions intérieures.

1. *Définition*. — Soit un système de points matériels, infiniment rapprochés, dans lequel on suppose des forces intérieures. Imaginons, dans ce système, un élément plan dont l'aire soit ω; le plan P de cet élément, indéfiniment prolongé, partage le système en deux parties A et B. Considérons, parmi les actions exercées par A sur B, celles dont la direction traverse ω et supposons que l'on opère leur réduction comme si B était un solide invariable. On admet que le système de ces forces est réductible à leur résultante appliquée au centre de gravité M de l'élément plan (¹), et cette résultante R est ce

(¹) En fait, le système des forces considérées est réductible à la résultante R appliquée au centre de gravité de l'élément plan et à un couple dont l'ordre infinitésimal est supérieur de deux unités à celui de la résultante; on ne tient pas compte de ce couple.

que l'on appelle la *tension élémentaire* sur celle des faces de l'élément plan qui est contiguë à A.

La résultante R est généralement oblique à l'élément. Si elle est normale à cet élément et dirigée vers A, elle représente une *traction;* si, encore normale à cet élément, elle est dirigée vers B, elle représente une *pression ;* si elle est comprise dans le plan de l'élément, on l'appelle *tangentielle.*

2. La tension élémentaire, sur celle des faces de l'élément qui est contiguë à B, s'obtiendrait de même en composant celles des actions exercées par B sur A dont la direction traverse ω. En vertu du principe de l'action et de la réaction, cette nouvelle résultante est égale et opposée à la précédente, de sorte que les tensions élémentaires sur les deux faces d'un élément plan quelconque sont égales et opposées.

3. Il résulte immédiatement de la définition précédente que, si l'on considère dans le système un volume V limité par une surface quelconque, le système des actions exercées par les points extérieurs à V sur les points intérieurs est équivalent au système des tensions élémentaires exercées sur les faces extérieures de tous les éléments de la surface limite.

4. Divisons la résultante R par l'aire ω; on admet que le quotient tend vers une limite finie quand ω tend vers zéro, et cette limite E est ce que l'on appelle la *tension par unité de surface,* ou simplement, la *tension* au point M sur le plan P. En considérant ω comme infiniment petit, on peut poser $R = E\omega$, de sorte que la tension élémentaire s'obtient en multipliant la tension par l'aire de l'élément.

5. La tension E, sur des plans P parallèles, menés

par tous les points d'un système, varie d'un point à un autre en intensité et en direction ; de plus, en un même point M, elle varie avec l'orientation du plan P ; enfin, s'il y a mouvement intérieur, pour un point et une orientation déterminés, la tension varie avec le temps.

Si donc on désigne par

x, y, z les coordonnées du point M ;
α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan P dirigée vers la région contiguë à celle des faces de ce plan à laquelle se rapporte la tension ;
X, Y, Z les composantes de la tension ;

les quantités X, Y, Z sont, en général, des fonctions des variables $(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma; t)$ qui, si elles étaient déterminées, feraient connaître à chaque instant la direction et l'intensité de la tension élémentaire sur un élément quelconque.

Nous allons établir que la détermination de ces trois fonctions revient à celle de six nouvelles fonctions de quatre variables seulement (x, y, z, t) et que, de plus, ces nouvelles fonctions sont liées entre elles par trois équations aux dérivées partielles, linéaires du premier ordre.

Ces diverses relations résultent de la nécessité qu'une portion quelconque du système soit en équilibre sous l'action des tensions élémentaires exercées sur sa surface et des forces qui sollicitent sa masse.

6. Afin d'exprimer les conditions de cet équilibre, nous considérons un point quelconque M du système et un élément de volume ϖ dont ce point fasse partie. La densité en M étant ρ, nous désignerons par $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$ les composantes, suivant les axes coordonnés, de la résultante des forces extérieures qui solli-

citent la masse de l'élément ϖ. Si le système est en mouvement, les composantes X_0, Y_0, Z_0 doivent comprendre, d'après le principe de d'Alembert, les forces d'inertie dont les valeurs sont, pour l'unité de masse, $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z}{dt^2}$.

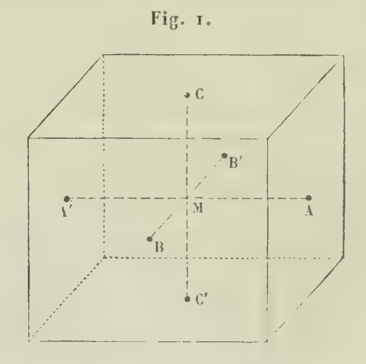
Nous désignerons, en outre, par les indices 1, 2, 3 les valeurs que prennent les composantes X, Y, Z de la tension lorsque la direction de la normale au plan sur lequel elle s'exerce se confond successivement avec les directions positives des axes OX, OY, OZ. Les neuf quantités

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{matrix}$$

sont, ainsi que X_0, Y_0, Z_0 et ρ, des fonctions de quatre variables, qui sont le temps t et les coordonnées x, y, z du point M.

7. *Équilibre du parallélépipède élémentaire.* — Cela posé, imaginons que l'élément ϖ soit un parallélé-

Fig. 1.



pipède dont les arêtes a, b, c soient parallèles aux axes et dont le point M soit le centre.

On sait que les forces extérieures qui agissent sur cet élément satisfont aux six conditions d'équilibre d'un solide invariable, suivant lesquelles :

1° La somme des projections des forces sur trois axes est nulle pour chaque axe;

2° La somme des moments des forces par rapport à trois axes est nulle pour chaque axe.

Le système de ces forces est équivalent aux tensions élémentaires agissant aux centres des six faces dont les aires sont bc, ca, ab, et aux forces $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$ appliquées au point M.

Évaluons d'abord la somme des composantes de toutes les forces suivant l'axe des x; les faces A et A' donnent à cette somme les deux termes

$$bc\left(X_1 + \frac{a}{2}\frac{dX_1}{dx}\right), \quad -bc\left(X_1 - \frac{a}{2}\frac{dX_1}{dx}\right),$$

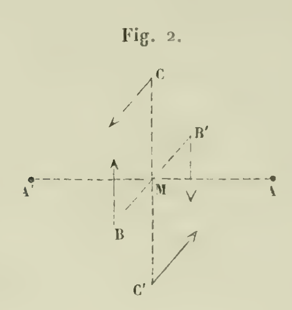
dont l'ensemble se réduit à $\varpi\frac{dX_1}{dx}$.

Le groupe des faces B, B' et celui des faces C, C' donnent de même, respectivement, $\varpi\frac{dX_2}{dy}$ et $\varpi\frac{dX_3}{dz}$; enfin, les forces qui agissent sur la masse ajoutent un dernier terme $\rho\varpi X_0$. En égalant à zéro la somme de ces forces et en divisant par ϖ, on a la première des équations suivantes; les deux autres résultent d'une sommation semblable des composantes parallèles à OY, puis des composantes parallèles à OZ :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX_1}{dx} + \frac{dX_2}{dy} + \frac{dX_3}{dz} + \rho X_0 = 0,\\ &\frac{dY_1}{dx} + \frac{dY_2}{dy} + \frac{dY_3}{dz} + \rho Y_0 = 0,\\ &\frac{dZ_1}{dx} + \frac{dZ_2}{dy} + \frac{dZ_3}{dz} + \rho Z_0 = 0.\end{aligned}\right.$$

8. Écrivons maintenant l'équation des moments par rapport à un axe parallèle à OX passant par le point M. La résultante des forces $\rho\varpi X_0$, $\rho\varpi Y_0$, $\rho\varpi Z_0$, étant appliquée au point M, donne un moment nul. Les composantes des tensions élémentaires rencontrent l'axe ou lui sont parallèles, à l'exception des deux composantes, parallèles à OZ, appliquées en B, B' et des deux compo-

Fig. 2.



santes, parallèles à OY, appliquées en C, C'. Les deux premières sont dirigées en sens contraires et leurs valeurs ne diffèrent de la composante caZ_2 relative au point M que de quantités infiniment petites par rapport à elles-mêmes; elles forment un couple dont le bras de levier est égal à b et dont le moment est

$$caZ_2 \times b = abcZ_2 = \varpi Z_2.$$

De même, les forces appliquées en C, C' constituent un autre couple dont le moment est $-\varpi Y_3$. L'équation des moments est, par conséquent, $\varpi(Z_2 - Y_3) = 0$; d'où $Z_2 = Y_3$.

On a deux équations analogues en rapportant les moments à des axes parallèles à OY et OZ passant par le point M, ce qui donne le système

$$(2) \qquad Z_2 = Y_3, \qquad X_3 = Z_1, \qquad Y_1 = X_2;$$

les équations expriment que, des neuf composantes, six sont égales deux à deux. Afin de préciser les composantes égales, désignons les neuf composantes par la lettre E affectée de deux des indices x, y, z; le premier indiquant l'axe perpendiculaire au plan sur lequel s'exerce la tension, le second l'axe parallèle à la composante. On a ainsi

$$(3)\quad \begin{cases} X_1 = E_{x,x}, & Y_1 = E_{x,y}, & Z_1 = E_{x,z}, \\ X_2 = E_{y,z}, & Y_2 = E_{y,y}, & Z_2 = E_{y,z}, \\ X_3 = E_{z,x}, & Y_3 = E_{z,y}, & Z_3 = E_{z,z}, \end{cases}$$

et les relations (2) deviennent

$$(4)\qquad E_{y,z} = E_{z,y}, \qquad E_{z,x} = E_{x,z}, \qquad E_{x,y} = E_{y,x}.$$

Elles expriment que, si l'on intervertit les deux indices, la composante conserve la même valeur.

9. *Introduction des* N, T. — Nous poserons désormais

$$E_{x,x} = N_1, \qquad E_{y,y} = N_2, \qquad E_{z,z} = N_3,$$
$$E_{y,z} = T_1, \qquad E_{z,x} = T_2, \qquad E_{x,y} = T_3.$$

D'après cette notation, les N donnent les composantes normales de la tension pour les trois plans perpendiculaires aux axes et les T donnent les composantes tangentielles qui sont égales deux à deux. Le système des neuf composantes est alors représenté par le tableau suivant

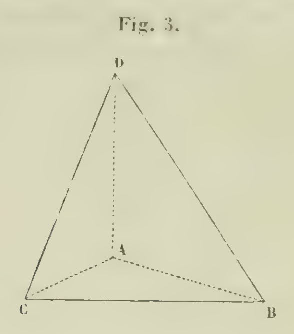
$$\begin{matrix} N_1, & T_3, & T_2, \\ T_3, & N_2, & T_1, \\ T_2, & T_1, & N_3, \end{matrix}$$

et les équations (1) peuvent s'écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \dfrac{dT_2}{dz} + \rho X_0 = 0, \\ \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} + \rho Y_0 = 0, \\ \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \dfrac{dN_3}{dz} + \rho Z_0 = 0. \end{cases}$$

10. *Équilibre du tétraèdre élémentaire.* — Supposons, en second lieu, que l'élément de volume ϖ, dont le point M fait partie, soit un tétraèdre dont les arêtes AB, AC, AD sont parallèles aux axes. Désignons par α,

Fig. 3.



β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la face BCD, par ω l'aire de cette face, par ω_1, ω_2, ω_3 les aires des trois faces triangulaires respectivement perpendiculaires à OX, OY, OZ.

D'après un théorème sur la projection des aires, on a

$$(6) \qquad \omega_1 = \alpha\omega, \qquad \omega_2 = \beta\omega, \qquad \omega_3 = \gamma\omega.$$

Cela posé, les tensions élémentaires sur les quatre faces du tétraèdre et les forces qui sollicitent sa masse se faisant équilibre, les sommes des projections de ces forces sur chaque axe doivent être nulles.

En projetant les forces sur l'axe des x, les faces ω, ω_1, ω_2, ω_3 donnent respectivement les termes ωX, $-\omega_1 N_1$, $-\omega_2 T_3$, $-\omega_3 T_2$; les forces qui agissent sur la masse donnent le terme $\rho\varpi X_0$, ϖ étant le volume du tétraèdre qui est un infiniment petit du troisième ordre négligeable par rapport aux autres qui sont du second. En égalant à zéro la somme de tous ces termes et en

ayant égard aux équations (6), on a la première des équations suivantes

$$(7)\quad \begin{cases} X = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ Y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ Z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma, \end{cases}$$

les deux autres équations résultant d'une sommation semblable des composantes parallèles à OY, puis parallèles à OZ.

Les équations (7) montrent comment X, Y, Z dépendent de α, β, γ; il résulte de ces équations que la détermination de X, Y, Z se réduit à celle des six fonctions N, T, lesquelles sont à quatre variables x, y, z, t et doivent vérifier les trois équations (5), qui sont aux dérivées partielles linéaires du premier ordre.

11. *Composante de la tension suivant une direction quelconque.* — Soit MN(α, β, γ) la normale à un plan P passant par le point M; projetons la tension correspondante sur une direction quelconque MS(α', β', γ'). Désignons cette projection par $E_{n,s}$, le premier indice se rapportant à la normale au plan et le second à la direction suivant laquelle on estime la tension. On a

$$E_{n.s} = X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma',$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs (7), on obtient

$$(8)\quad \begin{cases} E_{n.s} = N_1 \alpha\alpha' + N_2 \beta\beta' + N_3 \gamma\gamma' + T_1(\beta\gamma' + \gamma\beta') \\ \qquad + T_2(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') + T_3(\alpha\beta' + \beta\alpha'). \end{cases}$$

Cette expression ne changeant pas quand on permute les deux systèmes de variables (α, β, γ), (α', β', γ'), on a

$$E_{n.s} = E_{s.n}.$$

ce qui démontre un théorème général dont la réciprocité des composantes tangentielles (n° 8) n'est qu'un cas particulier.

12. *Surface directrice.* — En particulier, la composante de la tension, normale au plan sur lequel elle s'exerce, s'obtient en confondant la direction MS avec la direction MN. En désignant cette composante par N, la formule (8) donne

$$(9) \quad N = N_1 \alpha^2 + N_2 \beta^2 + N_3 \gamma^2 + 2 T_1 \beta\gamma + 2 T_2 \gamma\alpha + 2 T_3 \alpha\beta,$$

et cette composante sera une traction ou une pression suivant que sa valeur sera positive ou négative.

Supposons maintenant qu'à partir du point M on porte, sur la normale au plan, une longueur MN dont le carré représente la valeur absolue de $\frac{1}{N}$ et, le point M étant pris comme origine, désignons par x, y, z les coordonnées du point N. On aura

$$(10) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm N}},$$

en prenant le signe + ou — suivant que N est positif ou négatif. En portant dans l'équation (9) les valeurs α, β, γ tirées des équations (10), il vient

$$(11) \quad N_1 x^2 + N_2 y^2 + N_3 z^2 + 2 T_1 yz + 2 T_2 zx + 2 T_3 xy = \pm 1,$$

de sorte que le lieu du point N est une surface du second degré; cette surface est dite *directrice*.

Lorsque la valeur de N conserve le même signe, quelle que soit la direction (α, β, γ), cette surface est un ellipsoïde; mais, si cette valeur change de signe, l'ellipsoïde est remplacé par le système de deux hyperboloïdes, dont l'un correspond au signe +, l'autre au signe —. Ces deux hyperboloïdes, dont l'un est à une

nappe et l'autre à deux nappes, sont conjugués, c'est-à-dire qu'ils ont le même centre avec les mêmes axes et un même cône asymptote.

La composante N est nulle pour les plans qui sont perpendiculaires aux génératrices du cône asymptote et l'on a, sur ces plans, des tensions tangentielles.

13. *Tensions principales.* — Si l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux de la surface directrice, les rectangles disparaissent de son équation, de sorte que l'on doit avoir $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$; les composantes tangentielles sont donc nulles sur des plans perpendiculaires aux nouveaux axes, et les tensions sur ces plans se réduisent à leurs composantes normales. Donc, *en tout point du système, il y a trois plans sur lesquels les tensions sont normales*.

Les trois tensions, normales aux plans sur lesquels elles s'exercent, sont dites *principales*.

14. *Ellipsoïdes des tensions.* — On obtient une autre surface du second degré, qui est toujours un ellipsoïde, en portant, à partir du point M, sur la direction même de la tension, une longueur ME égale à sa grandeur.

En effet, les coordonnées du point E sont alors les composantes X, Y, Z de la tension et l'on déduit des relations (7), pour α, β, γ, des valeurs linéaires en X, Y, Z. En portant ces valeurs dans l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on a l'équation d'un ellipsoïde.

Les directions des axes de cet ellipsoïde se confondent avec celles des tensions principales; car, en prenant celles-ci pour axes coordonnés, on a

$$T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad T_3 = 0.$$

et, des équations (7) réduites aux suivantes

$$X = N_1 \alpha, \qquad Y = N_2 \beta, \qquad Z = N_3 \gamma.$$

on tire l'équation

$$\left(\frac{X}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{N_2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{N_3}\right)^2 = 1,$$

qui est celle d'un ellipsoïde rapporté à ses axes.

15. *Formules de transformation des tensions.* — Supposons que l'on change la direction des axes coordonnés ; soient

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}$$

les formules de transformation, dans lesquelles les lettres α, β, γ affectées des indices 1, 2, 3 représentent, suivant la règle connue, les cosinus des angles que les nouveaux axes font avec les anciens.

Nous avons désigné par (N, T) les composantes des tensions exercées, au point M, sur des plans perpendiculaires aux anciens axes ; appelons de même

$$\begin{matrix} N'_1, & T'_3, & T'_2, \\ T'_3, & N'_2, & T'_1, \\ T'_2, & T'_1, & N'_3 \end{matrix}$$

les composantes, suivant les nouveaux axes, des tensions exercées, au même point M, sur des plans perpendiculaires aux x', y', z'.

Les (N', T') sont les coefficients de l'équation de la surface directrice rapportée à des parallèles aux nouveaux axes, menées par le point M, et il suffit de porter les valeurs précédentes de x, y, z dans l'équation (11), pour obtenir les expressions suivantes qui donnent les

(N', T') en fonction des (N, T),

$$
(12) \quad \left\{
\begin{aligned}
N'_1 &= N_1 \alpha_1^2 + N_2 \beta_1^2 + N_3 \gamma_1^2 + 2 T_1 \beta_1 \gamma_1 \\
&\quad + 2 T_2 \gamma_1 \alpha_1 + 2 T_3 \alpha_1 \beta_1, \\
N'_2 &= N_1 \alpha_2^2 + N_2 \beta_2^2 + N_3 \gamma_2^2 + 2 T_1 \beta_2 \gamma_2 \\
&\quad + 2 T_2 \gamma_2 \alpha_2 + 2 T_3 \alpha_2 \beta_2, \\
N'_3 &= N_1 \alpha_3^2 + N_2 \beta_3^2 + N_3 \gamma_3^2 + 2 T_1 \beta_3 \gamma_3 \\
&\quad + 2 T_2 \gamma_3 \alpha_3 + 2 T_3 \alpha_3 \beta_3 ; \\
T'_1 &= N_1 \alpha_2 \alpha_3 + N_2 \beta_2 \beta_3 + N_3 \gamma_2 \gamma_3 + T_1 (\beta_2 \gamma_3 + \gamma_2 \beta_3) \\
&\quad + T_2 (\gamma_2 \alpha_3 + \alpha_2 \gamma_3) + T_3 (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3), \\
T' &= N_1 \alpha_3 \alpha_1 + N_2 \beta_3 \beta_1 + N_3 \gamma_3 \gamma_1 + T_1 (\beta_3 \gamma_1 + \gamma_3 \beta_1) \\
&\quad + T_2 (\gamma_3 \alpha_1 + \alpha_3 \gamma_1) + T_3 (\alpha_3 \beta_1 + \beta_3 \alpha_1), \\
T'_3 &= N_1 \alpha_1 \alpha_2 + N_2 \beta_1 \beta_2 + N_3 \gamma_1 \gamma_2 + T_1 (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \\
&\quad + T_2 (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + T_3 (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2).
\end{aligned}
\right.
$$

II. — Déplacement général d'un système de points.

16. *Formules fondamentales.* — Considérons un système de points infiniment rapprochés rapporté à trois axes rectangulaires. Concevons ce système déplacé de telle manière que les projections u, v, w du déplacement d'un point quelconque M soient des fonctions continues des coordonnées primitives x, y, z de ce point.

Pour un point $N(x+h, y+k, z+l)$, infiniment voisin de M, les projections du déplacement sont

$$
(13) \quad \left\{
\begin{aligned}
u' &= u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{dv}{dz} l, \\
v' &= v + \frac{dv}{dx} h + \frac{dv}{dy} k + \frac{dv}{dz} l, \\
w' &= w + \frac{dw}{dx} h + \frac{dw}{dy} k + \frac{dw}{dz} l.
\end{aligned}
\right.
$$

Imaginons, par le point M, des axes parallèles à OX, OY, OZ; par rapport à ces axes, les coordonnées de N sont h, k, l avant le déplacement; après le déplacement,

ces coordonnées deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} h' = h + u' - u, \\ k' = k + v' - v, \\ l' = l + w' - w, \end{cases}$$

c'est-à-dire, d'après les formules (13),

$$(15)\qquad \begin{cases} h' = \left(1 + \dfrac{du}{dx}\right) h + \dfrac{du}{dy}\, k + \dfrac{du}{dz}\, l, \\ k' = \dfrac{dv}{dx}\, h + \left(1 + \dfrac{dv}{dy}\right) k + \dfrac{dv}{dz}\, l. \\ l' = \dfrac{dw}{dx}\, h + \dfrac{dw}{dy}\, k + \left(1 + \dfrac{dw}{dz}\right) l. \end{cases}$$

Ces expressions sont linéaires en h, k, l; par suite, les points N situés, dans le voisinage de M, sur une surface $F(h, k, l) = 0$, seront après le déplacement sur une surface du même degré. Ainsi, les points d'une sphère viendront sur un ellipsoïde; les points d'un plan sur un plan; de même, les points qui étaient sur une droite restent sur une droite.

17. Dans ce qui suit, nous considérerons exclusivement des déplacements tels que les différences $h' - h$, $k' - k$, $l' - l$ soient très petites par rapport à h, k, l. Dans cette hypothèse, les neuf dérivées partielles qui entrent dans les formules (13) et (15) ont des valeurs très petites que nous traiterons comme des infiniment petits. Nous désignerons par δ la variation très petite qu'éprouve une quantité quelconque par suite du déplacement et nous traiterons les δ comme des différentielles.

18. *Décomposition du déplacement.* — Les formules (13) montrent que le déplacement d'un élément entou-

rant le point M est déterminé par les valeurs que présentent en ce point les neuf dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z.

On peut substituer à ces dérivées neuf nouveaux coefficients dont l'interprétation géométrique est plus commode ; en posant

$$(16)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{du}{dx}, & a_2 = \dfrac{dv}{dy}, & a_3 = \dfrac{dw}{dz}, \\ 2b_1 = \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}, & 2b_2 = \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}, & 2b_3 = \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}, \\ 2p_1 = \dfrac{dw}{dy} - \dfrac{dv}{dz}, & 2p_2 = \dfrac{du}{dz} - \dfrac{dw}{dx}, & 2p_3 = \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{du}{dy}, \end{cases}$$

les expressions (13) peuvent s'écrire

$$(17)\quad \begin{cases} u' = u + p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v' = v + p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w' = w + p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{cases}$$

On en conclut que le déplacement (u', v', w') du point N s'obtient en composant :

1° Le déplacement (u, v, w);

2° Le déplacement dont les composantes sont

$$(18)\quad \begin{cases} u_1 = p_2 l - p_3 k, \\ v_1 = p_3 h - p_1 l, \\ w_1 = p_1 k - p_2 h; \end{cases}$$

3° Le déplacement dont les composantes sont

$$(19)\quad \begin{cases} u_2 = a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ v_2 = b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ w_2 = b_2 h + b_1 k + a_3 l. \end{cases}$$

Le premier de ces déplacements composants est identique au déplacement du point M.

Le deuxième est une rotation, aux composantes an-

gulaires (p_1, p_2, p_3) autour d'un axe passant par le point M.

Le troisième peut se représenter comme il suit.

19. Soit la série des surfaces homothétiques ayant pour équation

$$(20)\quad a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + 2 b_1 yz + 2 b_2 zx + 2 b_3 xy = \lambda.$$

Supposons le centre au point M et considérons celle de ces surfaces qui passe par le point N, ce qui détermine λ par la condition

$$(21)\quad a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk = \lambda.$$

D'après les valeurs (19), le plan tangent à cette surface au point N a pour équation

$$(22)\qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z = \lambda.$$

Par suite, le déplacement (u_2, v_2, w_2) du point N est normal à la surface qui passe par ce point. De plus, si l'on désigne par δ la grandeur de ce déplacement et par ϖ la perpendiculaire abaissée du point M sur le plan tangent, on a

$$\varpi = \frac{\lambda}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{\lambda}{\delta};$$

d'où il résulte que la grandeur du déplacement est donnée par la formule $\delta = \frac{\lambda}{\varpi}$.

20. En résumé, on peut dire que le déplacement d'un élément environnant le point M se compose d'une translation, d'une rotation autour d'un axe et d'une déformation.

La translation est déterminée par les composantes u, v, w du déplacement du point M.

La rotation est déterminée par les quantités p_1, p_2, p_3, que nous appellerons *rotations élémentaires*.

La déformation est déterminée par les six quantités a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, que nous appellerons *déformations élémentaires*.

Les rotations et déformations élémentaires sont définies par les relations (16).

Il est à remarquer que, d'après ces relations, les rotations disparaissent lorsque u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ des coordonnées.

21. *Dilatation linéaire.* — On appelle *dilatation linéaire* le rapport de l'accroissement d'une longueur à sa valeur primitive.

Cherchons la variation très petite de la distance r du point M au point N dont les coordonnées relatives sont h, k, l. De la relation $r^2 = h^2 + k^2 + l^2$, on tire

$$r\,\delta r = h\,\delta h + k\,\delta k + l\,\delta l.$$

Les relations (14) et (17) donnent

$$(23)\quad \begin{cases} \delta h = p_2 l - p_3 k + a_1 h + b_3 k + b_2 l, \\ \delta k = p_3 h - p_1 l + b_3 h + a_2 k + b_1 l, \\ \delta l = p_1 k - p_2 h + b_2 h + b_1 k + a_3 l, \end{cases}$$

et l'on a, par suite,

$$(24)\quad r\,\delta r = a_1 h^2 + a_2 k^2 + a_3 l^2 + 2 b_1 kl + 2 b_2 lh + 2 b_3 hk.$$

Désignons par a la dilatation linéaire et par α, β, γ les cosinus directeurs de MN ; on a

$$a = \frac{\delta r}{r}, \qquad \alpha = \frac{h}{r}, \qquad \beta = \frac{k}{r}, \qquad \gamma = \frac{l}{r},$$

et la formule (24) devient

$$(25)\quad a = a_1\alpha^2 + a_2\beta^2 + a_3\gamma^2 + 2 b_1\beta\gamma + 2 b_2\gamma\alpha + 2 b_3\alpha\beta.$$

Cette formule donne la dilatation linéaire dans la direction (α, β, γ). La dilatation se réduit aux valeurs a_1, a_2, a_3 lorsque la direction (α, β, γ) devient successivement parallèle aux axes OX, OY, OZ.

22. *Dilatation angulaire.* — Soient N_1, N_2 deux points infiniment voisins de M; désignons par les lettres r, h, k, l, affectées des indices 1 et 2, les distances de ces points au point M et leurs coordonnées relatives. En appelant V l'angle N_1MN_2, on a

$$r_1 r_2 \cos V = h_1 h_2 + k_1 k_2 + l_1 l_2;$$

d'où, par différentiation,

$$\begin{aligned}&\cos V\,\delta(r_1 r_2) - r_1 r_2 \sin V.\delta V\\ &\quad = h_2\,\delta h_1 + k_2\,\delta k_1 + l_2\,\delta l_1 + h_1\,\delta h_2 + k_1\,\delta k_2 + l_1\,\delta l_2.\end{aligned}$$

Cette formule se simplifie lorsque l'angle V est droit et, en ayant égard aux formules (17), il vient alors

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2} r_1 r_2.\delta V = a_1 h_1 h_2 + a_2 k_1 k_2 + a_3 l_1 l_2 + b_1(k_1 l_2 + l_1 k_2)\\ + b_2(l_1 h_2 + h_1 l_2) + b_3(h_1 k_2 + k_1 h_2)\end{aligned}$$

ou, en posant $-\frac{1}{2}\delta V = b$ et en introduisant les cosinus directeurs de MN_1, MN_2,

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned}b = a_1\alpha_1\alpha_2 + a_2\beta_1\beta_2 + a_3\gamma_1\gamma_2 + b_1(\beta_1\gamma_2 + \gamma_1\beta_2)\\ + b_2(\gamma_1\alpha_2 + \alpha_1\gamma_2) + b_3(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2).\end{aligned}\right.$$

Cette formule donne la moitié de la diminution qu'éprouve, par la déformation, l'angle primitivement droit des deux directions $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

Cette quantité se réduit à b_1, b_2, b_3 lorsque les deux directions dont il s'agit sont successivement parallèles à (OY, OZ), (OZ, OX), (OX, OY).

23. *Dilatations et glissements.* — Ces propositions définissent la signification géométrique des six déformations élémentaires.

Imaginons un parallélépipède élémentaire dont les arêtes soient parallèles aux axes coordonnés; le déplacement général du système transporte ce parallélépipède en le déformant. Il résulte de ce qui précède que les quantités a_1, a_2, a_3 représentent les dilatations des arêtes et que les quantités $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$ représentent les diminutions des angles, primitivement droits, compris entre les arêtes prises deux à deux.

On appelle fréquemment *dilatations* les quantités a_1, a_2, a_3 et *glissements*, ou *distorsions*, les quantités $2b_1$, $2b_2$, $2b_3$.

24. *Surface des dilatations.* — Reprenons la formule (25) qui donne la dilatation linéaire dans une direction quelconque. Si l'on porte, à partir du point M, dans la direction (α, β, γ), une longueur MA égale à la valeur absolue de la dilatation a et si, le point M étant pris comme origine, on appelle x, y, z les coordonnées du point A, on a

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\pm a}},$$

le signe étant $+$ ou $-$, suivant que a est positif ou négatif. En éliminant α, β, γ entre ces équations et l'équation (25), il vient

$$(27)\qquad a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_1yz + 2b_2zx + 2b_3xy = \pm 1,$$

de sorte que le lieu du point A est une surface du second degré. Cette surface est un ellipsoïde s'il y a, en tous sens, ou dilatation ou condensation autour du point M. S'il y a dilatation dans certaines directions et condensation dans d'autres, l'ellipsoïde est remplacé par deux hyperboloïdes conjugués.

25. *Dilatations principales.* — Si l'on prend pour

axes coordonnés les axes principaux de la surface des dilatations, les rectangles disparaissent de son équation, de sorte que l'on a $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$. Donc, *en tout point d'un système qui subit une déformation, il existe trois directions rectangulaires telles que les angles de ces directions, prises deux à deux, restent droits après la déformation.*

Les dilatations, dans ces directions, sont dites *principales.*

26. *Formules de transformation des déformations élémentaires.* — Quand on change la direction des axes coordonnés, les déformations élémentaires a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 deviennent a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3. Pour avoir les nouvelles valeurs en fonction des anciennes, il suffit de transformer l'équation (27) de la surface des dilatations par la substitution

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z',$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z',$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'.$$

Les coefficients de l'équation transformée donnent, pour les nouvelles déformations élémentaires, des expressions qui ne diffèrent de celles que l'on a obtenues, au n° 15, pour les (N', T'), que par la substitution de (a, b) à (N, T).

Il est à remarquer que les formules que l'on obtient ainsi donnent la relation

$$(28) \qquad a'_1 + a'_2 + a'_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

de sorte que la somme des dilatations suivant les axes est un invariant.

27. *Dilatation cubique.* — La déformation change le

volume d'un élément environnant le point M. Le rapport de l'accroissement de ce volume à sa valeur pimitive est la *dilatation cubique* au point M. Tout volume étant décomposable en tétraèdres, il suffit d'évaluer la dilatation d'un tétraèdre.

Considérons avec le point M trois points infiniment voisins N_1, N_2, N_3. Désignons leurs coordonnées relatives par les lettres h, k, l affectées des indices 1, 2, 3. Le volume du tétraèdre dont ces quatre points sont les sommets est

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 \\ h_3 & k_3 & l_3 \end{vmatrix}.$$

En désignant par (h', k', l') les valeurs de (h, k, l) après la déformation, ce volume devient

$$V' = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} h'_1 & k'_1 & l'_1 \\ h'_2 & k'_2 & l'_2 \\ h'_3 & k'_3 & l'_3 \end{vmatrix}.$$

En ayant égard aux formules (15) qui expriment (h', k', l') en fonction de (h, k, l), on voit immédiatement, par la règle de la multiplication des déterminants, que V' est le produit de V par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+\frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & 1+\frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & 1+\frac{dw}{dz} \end{vmatrix}.$$

On a donc $V' = V\Delta$, et la dilatation cubique θ, égale à $\frac{V'-V}{V}$, est donnée par la formule

(29) $$\theta = \Delta - 1.$$

Cette expression, ne dépendant pas de l'orientation du tétraèdre, s'étend à un volume quelconque ; elle s'applique à des déplacements quelconques u, v, w, sans restriction relative à l'ordre de grandeur des neuf dérivées partielles.

Quand ces dérivées sont très petites, l'expression trouvée se réduit à la suivante :

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{30}$$

28. Cette dernière formule peut s'établir comme il suit : soit un élément parallélépipédique, ayant un sommet au point M, dont les arêtes soient dans les directions des dilatations principales. Désignons par a'_1, a'_2, a'_3 ces dilatations principales.

Par la déformation, les arêtes sont respectivement multipliées par $1 + a'_1$, $1 + a'_2$, $1 + a'_3$; de plus les angles restent droits. Donc le volume de l'élément est multiplié par $(1 + a'_1)(1 + a'_2)(1 + a'_3)$, ou par $1 + a'_1 + a'_2 + a'_3$, en négligeant les quantités très petites d'un ordre supérieur au premier. Il en résulte que la dilatation cubique est

$$\theta = a'_1 + a'_2 + a''_3.$$

On a donc, pour un système d'axes quelconques, d'après la relation (28),

$$\theta = a_1 + a_2 + a_3,$$

ce qui donne la formule (30).

III. — Expressions des tensions dans un système élastique déformé.

29. *Expressions des* (N, T) *en fonction des* (a, b). — Nous appellerons *état naturel* d'un système matériel

celui où il n'existe aucune tension. Si, à partir de cet état, on déforme le système par l'application des forces extérieures, les tensions cessent d'être nulles par suite de la variation des forces intérieures.

L'hypothèse fondamentale de la théorie de l'élasticité consiste à admettre que *l'action mutuelle de deux points matériels devient insensible dès que la distance de ces points dépasse une limite très petite.*

Par suite de cette hypothèse, la valeur que la tension, sur un plan quelconque, en un point quelconque M, acquiert après le déplacement de ce point, dépend uniquement de la déformation subie par la portion du système comprise dans un volume très petit autour du point que l'on considère. Or nous avons vu que la déformation de cet élément est complètement déterminée par les valeurs que présentent au point M, par suite de son déplacement, les six déformations élémentaires (a, b); donc les (N, T) sont des fonctions des (a, b).

Supposons que ces fonctions puissent être représentées par la série de Maclaurin et ne conservons, à cause de la petitesse des variables, que les termes du premier ordre. En remarquant en outre que, dans l'état naturel, les tensions sont nulles avec les déformations, on est conduit à ce résultat : *lorsqu'un système élastique subit une petite déformation à partir de son état naturel, les six composantes* (N, T) *sont des fonctions linéaires et homogènes des six déformations élémentaires* (a, b).

30. Les coefficients de ces fonctions, au nombre total de 36, dépendent de la constitution du système, autour du point M, avant la déformation. Ils peuvent être, si cette constitution est variable d'un point à un autre, des fonctions des coordonnées x, y, z de ce point. Ils se ré-

duisent à des constantes si, comme nous le supposerons dans ce qui suit, le système est homogène.

Nous écrirons comme il suit les valeurs des (N, T) :

$$(31) \qquad \begin{cases} N = \varphi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \\ T = \psi(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3), \end{cases}$$

en nous rappelant que les caractéristiques φ et ψ, que nous affecterons successivement des indices 1, 2, 3, représentent des fonctions linéaires et homogènes.

Le nombre des coefficients se réduit beaucoup, lorsque le système possède, dans son état naturel, certains éléments de symétrie.

31. *Principe de la réduction.* — Supposons que le système présente, dans son état naturel, la même disposition par rapport à deux systèmes distincts d'axes coordonnés (S) et (S'). Il est évident que, relativement à (S'), les expressions des (N', T') en (a', b') doivent être les mêmes que celles des (N, T) en (a, b), relativement à (S).

Pour exprimer les conditions que cette identité de forme des fonctions impose aux variables dont elles dépendent, on opère comme il suit :

1° On exprime les (N', T') en fonction des (N, T) par les formules de transformation du n° 15.

2° Dans les expressions ainsi obtenues, on substitue aux (N, T) leurs valeurs (31);

3° On remplace enfin les (a, b) par leurs valeurs en fonction des (a', b') en se servant des formules de transformation du n° 26.

Les expressions fournies par ces trois opérations doivent se confondre, quand on supprime les accents, avec les formules (31) qui donnent les (N, T) en fonction des (a, b).

Nous allons appliquer cette méthode à quelques cas particuliers.

31. *Plan de symétrie.* — Supposons d'abord que, dans l'état naturel, le système soit distribué symétriquement, autour d'un point quelconque M, par rapport à un plan mené par ce point dans une orientation déterminée. Prenons l'axe des x perpendiculaire à ce plan; puis, conservant les axes OY, OZ, remplaçons l'axe OX par son prolongement. Les relations qui lient les (N', T') aux (N, T) deviennent

$$N'_1 = N_1, \qquad N'_2 = N_2, \qquad N'_3 = N_3,$$
$$T'_1 = T_1, \qquad T'_2 = -T_2, \qquad T'_3 = -T_3.$$

On a de même, entre les (a, b) et les (a', b'), les relations

$$a_1 = a'_1, \qquad a_2 = a'_2, \qquad a_3 = a'_3,$$
$$b_1 = b'_1, \qquad b_2 = -b'_2, \qquad b_3 = -b'_3.$$

Donc les relations (31) doivent rester les mêmes quand on y change à la fois les signes de T_2, T_3; b_2, b_3. Il faut, en conséquence, que les coefficients de b_2, b_3 soient nuls dans N_1, N_2, N_3, T_1 et que les coefficients de a_1, a_2, a_3, b_1 soient nuls dans T_2, T_3.

On a ainsi les formules suivantes, qui sont à vingt coefficients,

$$(32)\quad \begin{cases} N_1 = \varphi_1(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_1 = \psi_1(a_1, a_2, a_3, b_1), \\ N_1 = \varphi_2(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_2 = \psi_2(b_2, b_3), \\ N_3 = \varphi_3(a_1, a_2, a_3, b_1), & T_3 = \psi_3(b_2, b_3). \end{cases}$$

32 *Trois plans de symétrie.* — S'il y a, au même point M, un second plan de symétrie perpendiculaire à OY, les équations (32) doivent rester les mêmes quand on y change à la fois les signes de T_1, T_3; b_1, b_3. Cela montre qu'il y a alors nécessairement un troisième plan

de symétrie perpendiculaire à OZ, et les formules se réduisent aux suivantes, qui renferment douze coefficients,

$$(33)\qquad \begin{cases} N_1 = \varphi_1(a_1, a_2, a_3), & T_1 = h_1 b_1, \\ N_2 = \varphi_2(a_1, a_2, a_3), & T_2 = h_2 b_2, \\ N_3 = \varphi_3(a_1, a_2, a_3), & T_3 = h_3 b_3, \end{cases}$$

h_1, h_2, h_3 désignant des constantes.

On voit que les composantes T_1, T_2, T_3 s'annulent avec b_1, b_2, b_3; il en résulte que, dans ce cas, *les directions des tensions principales se confondent avec celles des dilatations principales.*

32. *Isotropie.* — Pour un système isotrope, les relations (31) doivent se transformer en elles-mêmes lorsqu'on substitue aux axes coordonnés tout autre système d'axes rectangulaires. Pour simplifier le calcul des conditions qui en résultent, nous attribuerons d'abord aux nouveaux axes certaines directions particulières, en remarquant de plus que les équations (33) doivent déjà comprendre, en particulier, celles qui sont relatives à l'isotropie.

33. Supposons d'abord que l'on permute circulairement les axes OX, OY, OZ. Ce changement d'axes produit les substitutions

$$\begin{pmatrix} N_1, & N_2, & N_3, & T_1, & T_2, & T_3 \\ N_2, & N_3, & N_1, & T_2, & T_3, & T_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & b_1, & b_2, & b_3 \\ a_2, & a_3, & a_1, & b_2, & b_3, & b_1 \end{pmatrix}$$

et les équations (33) doivent alors rester les mêmes.

Il en résulte d'abord que les trois constantes h_1, h_2, h_3 ont une même valeur h, ensuite que N_2, N_3 se déduisent de N en y permutant circulairement les varia-

bles; de sorte que l'on a

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \varphi(a_1, a_2, a_3), & T_1 &= hb_1,\\ N_2 &= \varphi(a_2, a_3, a_1), & T_2 &= hb_2,\\ N_3 &= \varphi(a_3, a_1, a_2), & T_3 &= hb_3. \end{aligned}\right.$$

33. Supposons maintenant que, conservant l'axe OX, on permute les axes OY, OZ, ce qui change a_2, a_3 en a_3, a_2. La valeur de N_1 devant rester la même, la fonction φ doit être symétrique en a_2, a_3; elle est donc de la forme

$$A a_1 + B(a_2 + a_3),$$

ce que l'on peut écrire

$$B(a_1 + a_2 + a_3) + (A - B)a_1$$

ou bien

$$\lambda\theta + 2\mu a_1,$$

en désignant par θ la dilatation cubique et par λ, μ deux constantes. Les formules (34) deviennent ainsi

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu a_1, & T_1 &= hb_1,\\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu a_2, & T_2 &= hb_2,\\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu a_3, & T_3 &= hb_3. \end{aligned}\right.$$

34. Supposons enfin que l'on fasse un changement quelconque d'axes coordonnés; on doit trouver les mêmes formes (35) et les mêmes coefficients pour les (N', T') en fonction des (a', b'); par exemple, on doit avoir

$$(36)\qquad N'_1 = \lambda\theta + 2\mu a'_1.$$

Or, en désignant par α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que OX' fait avec OX, OY, OZ, on a (n° 15)

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} N'_1 = {} & N_1\alpha_1^2 + N_2\beta_1^2 + N_3\gamma_1^2\\ & + 2T_1\beta_1\gamma_1 + 2T_2\gamma_1\alpha_1 + 2T_3\alpha_1\beta_1 \end{aligned}\right.$$

et l'on a aussi (n° 26)

$$(38)\qquad \begin{cases} a'_1 = a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2 \\ \qquad + 2b_1\beta_1\gamma_1 + 2b_2\gamma_1\alpha_1 + 2b_3\alpha_1\beta_1. \end{cases}$$

Cela posé, si l'on porte les valeurs (35) dans l'expression (37), on trouve

$$\begin{aligned} N'_1 = \lambda\theta &+ 2\mu(a_1\alpha_1^2 + a_2\beta_1^2 + a_3\gamma_1^2) \\ &+ 2h(b_1\beta_1\gamma_1 + b_2\gamma_1\alpha_1 + b_3\alpha_1\beta_1), \end{aligned}$$

ou bien, d'après la relation (38),

$$N'_1 = \lambda\theta + 2\mu a'_1 + 2(h - 2\mu)(b_1\beta_1\gamma_1 + b_2\gamma_1\alpha_1 + b_3\alpha_1\beta_1).$$

Donc, pour que cette valeur se réduise à l'expression (36), il faut que l'on ait $h - 2\mu = 0$. Le calcul des autres (N', T') conduit au même résultat.

35. En résumé, dans le cas des systèmes homogènes et isotropes, on obtient, pour les (N, T), les valeurs suivantes renfermant deux coefficients constants λ, μ,

$$(39)\qquad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu a_1, & T_1 = 2\mu b_1, \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu a_2, & T_2 = 2\mu b_2, \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu a_3; & T_3 = 2\mu b_3. \end{cases}$$

La méthode qui a conduit à ce résultat repose sur les principes employés par Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1856). Les expressions des tensions dans les milieux isotropes déformés ont été données pour la première fois par Cauchy (1827), en calculant directement la résultante des forces intérieures considérées comme fonctions des distances des points entre lesquels elles s'exercent. Cette autre méthode, qui permet de supposer que l'état primitif ne soit pas ce que nous avons appelé un *état naturel*, conduit à admettre que, lorsque la déformation a lieu à partir de cet état naturel, on a $\lambda = \mu$, de sorte

que les formules sont à un seul coefficient; mais ce point est encore l'objet de controverses.

36. *Expressions des* (N, T) *en fonction des déplacements* u, v, w. — En remplaçant dans les expressions (39) les déformations élémentaires (a, b) par leurs valeurs (16) du n° 18, il vient

$$(40)\quad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{du}{dx}, & T_1 = \mu\left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right), \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{dv}{dy}, & T_2 = \mu\left(\dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx}\right), \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{dw}{dz}, & T_3 = \mu\left(\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy}\right), \end{cases}$$

et l'on a, dans ces formules,

$$(41)\qquad \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Ces valeurs des (N, T) se rapportent à la position du point M après son déplacement, c'est-à-dire au point dont les coordonnées sont $x + u$, $y + v$, $z + w$; mais, quand le déplacement est très petit, on peut, comme nous le ferons dans les calculs qui suivent, rapporter les composantes des tensions au point (x, y, z).

IV. — Équations de l'équilibre et du mouvement intérieur pour les systèmes isotropes.

37. *Équations indéfinies.* — Les six fonctions (N, T) doivent vérifier les trois équations (5) du n° 9; dans ces équations, les quantités X_0, Y_0, Z_0 représentent, rapportées à l'unité de masse, les forces extérieures qui sollicitent le point M et elles comprennent,

si le système se déforme ou vibre, les forces d'inertie qui ont alors pour valeurs $-\frac{d^2 u}{dt^2}$, $-\frac{d^2 v}{dt^2}$, $-\frac{d^2 w}{dt^2}$. En dégageant les forces d'inertie et représentant encore par X_0, Y_0, Z_0 les composantes des forces extérieures qui agissent sur la masse du point M, les équations (5) deviennent

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X_0=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\ &\frac{dT_3}{dx}+\frac{dX_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y_0=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\\ &\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dX_3}{dz}+\rho Z_0=\rho\frac{d^2w}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

ρ étant la densité du système au point M.

En substituant les valeurs (40) et en ayant égard à l'expression (41) de θ, on obtient les trois équations suivantes :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)+\rho X_0=\rho\frac{d^2u}{dt^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)+\rho Y_0=\rho\frac{d^2v}{dt^2},\\ &(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)+\rho Z_0=\rho\frac{d^2w}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

L'expression différentielle

$$\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}$$

est ce que Lamé a appelé le *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction F. Nous représenterons ce paramètre par ΔF, en posant symboliquement

$$\Delta=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2},$$

et les équations (43) prennent ainsi la forme simple

$$(44)\quad \begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta u + \rho X_0 = \rho\,\dfrac{d^2 u}{dt^2}, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta v + \rho Y_0 = \rho\,\dfrac{d^2 v}{dt^2}, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w + \rho Z_0 = \rho\,\dfrac{d^2 w}{dt^2}. \end{cases}$$

Ces équations, dites *indéfinies,* sont applicables, indistinctement, à tous les points du système.

38. *Équations définies.* — En général, des efforts extérieurs donnés agissent sur la surface du système que l'on considère. Il en résulte de nouvelles équations qui doivent être satisfaites aux limites du corps, c'est-à-dire sur la surface seulement. On obtient ces nouvelles équations, dites *équations définies* ou *équations à la surface,* en écrivant que, pour un point quelconque de la surface limite, l'effort extérieur s'exerçant sur un élément plan de cette surface a la même grandeur et la même direction que la tension correspondante.

Soient, pour un point quelconque (x, y, z) de la surface limite,

F l'effort extérieur par unité de surface;
l, m, n les cosinus directeurs de la force F;
α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface;
X, Y, Z les composantes de la tension.

Les équations à la surface sont

$$F\,l = X, \qquad F\,m = Y, \qquad F\,n = Z,$$

ou bien, en remplaçant X, Y, Z par les valeurs (7) du n° 10,

$$(45)\quad \begin{cases} F\,l = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ F\,m = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ F\,n = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations, ainsi que α, β, γ, doivent être considérés comme des fonctions données de x, y, z. En remplaçant les (N, T) par leurs valeurs en fonction des u, v, w, spécialement par les valeurs (40) dans le cas des milieux isotropes, on a trois équations auxquelles doivent satisfaire sur la surface limite les déplacements u, v, w, fonctions de x, y, z, t.

Les mêmes fonctions doivent satisfaire, dans toute l'étendue du milieu, aux équations indéfinies (44).

39. *Équilibre d'élasticité.* — Quand il s'agit de l'équilibre, les fonctions u, v, w sont indépendantes du temps et les seconds membres des équations (44) sont égaux à zéro.

Si l'on suppose de plus que les seules forces extérieures sont celles qui s'exercent sur la surface du milieu, les quantités X_0, Y_0, Z_0 disparaissent des équations (44) qui se réduisent aux suivantes :

$$(46)\quad \begin{cases} (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\,\Delta u = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\,\Delta v = 0, \\ (\lambda + \mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\,\Delta w = 0. \end{cases}$$

On a ainsi trois équations différentielles auxquelles satisfont les déplacements u, v, w fonctions de x, y, z et il s'agit de trouver des solutions de ces équations telles que les équations à la surface (45) soient également satisfaites.

40. *Cas particulier.* — Supposons que les déplacements soient les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad v = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

On en tire

$$\theta = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \Delta\varphi,$$

et, par suite,

$$\Delta u = \Delta \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\Delta\varphi = \frac{d\theta}{dx}.$$

On a donc, dans ce cas particulier,

$$\Delta u = \frac{d\theta}{dx}, \qquad \Delta v = \frac{d\theta}{dy}, \qquad \Delta w = \frac{d\theta}{dz},$$

et, en supposant $\lambda + 2\mu$ différent de zéro, les équations (46) se réduisent aux suivantes

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dy} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

Pour qu'elles soient satisfaites, il faut et il suffit que *la dilatation cubique soit constante dans toute l'étendue du système déformé.*

V. — Exemples d'équilibre.

a. — Compression normale et uniforme.

41. Soit un système élastique soumis, sur toute sa surface, à une pression normale et uniforme P. La direction (l, m, n) de cette pression étant opposée à la direction (α, β, γ) de la normale extérieure, les équations définies (45) deviennent

$$(47) \qquad \begin{cases} -P\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ -P\beta = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ -P\gamma = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Supposons maintenant que, l'origine des coordonnées restant fixe, les déplacements u, v, w soient représentés par les valeurs

$$(48) \qquad u = -ax, \qquad v = -ay, \qquad w = -az,$$

a étant un coefficient à déterminer.

Par ces valeurs, les équations indéfinies (46) sont évidemment satisfaites; les T sont nuls et les N se réduisent à $-(3\lambda + 2\mu)$. Donc, pour satisfaire aux équations (47), il suffit de prendre

$$a = \frac{P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Les déplacements (48) satisfont alors à toutes les conditions de l'équilibre d'élasticité.

b. — Extension longitudinale d'un prisme.

42. Considérons un solide prismatique dont les arêtes soient parallèles à OZ : soit F la traction, rapportée à l'unité de surface, qui agit sur chacune de ses bases. Nous allons vérifier que, dans l'équilibre d'élasticité, les déplacements peuvent être représentés par les valeurs

$$(49) \qquad u = -ax, \qquad v = -ay, \qquad w = cz,$$

a et c étant des constantes convenablement déterminées.

En effet, ces valeurs vérifient d'abord les équations (46); de plus, d'après les formules (40), elles donnent, pour les T, des valeurs nulles et, pour les N, des valeurs constantes dans toute l'étendue du milieu

$$N_1 = N_2 = (c - 2a)\lambda - 2a\mu,$$
$$N_3 = (c - 2a)\lambda + 2c\mu.$$

Or N_1, N_2 sont nuls à la surface latérale du prisme et N_3

est égal à F sur ses bases ; on a donc les équations

$$\lambda c - 2(\lambda + \mu)a = 0,$$
$$(\lambda + 2\mu)c - 2\lambda a = F,$$

d'où l'on tire

$$(50) \qquad c = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F, \qquad a = \frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu} F.$$

Avec ces valeurs, les déplacements (49) satisfont à toutes les conditions d'équilibre.

c. — Équilibre d'une couche sphérique.

43. Soit un solide homogène et isotrope limité par deux sphères concentriques. Ce solide est soumis, sur chacune des surfaces sphériques, à une pression normale et uniforme ; on se propose de déterminer l'état d'équilibre.

Plaçant l'origine au centre de figure, considérons un point quelconque M ; désignons par x, y, z ses coordonnées dans l'état naturel et par r sa distance à l'origine, de sorte que

$$(51) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Les forces appliquées au solide sont évidemment telles que, par suite de la déformation, le point M se déplace sur le rayon mené de l'origine à sa position primitive et la grandeur du déplacement ε est la même pour tous les points primitivement situés à la même distance de l'origine. On a donc

$$(52) \qquad u = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad w = \varepsilon \frac{z}{r},$$

ε étant une fonction de r à déterminer.

44. Remarquons d'abord que ces valeurs de u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction φ de x, y, z. On a, en effet,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varepsilon \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r}.$$

Or la relation (51) donne

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr,$$

donc l'expression précédente est égale à $\varepsilon\,dr$ et elle est, par suite, la différentielle totale de la fonction

$$\varphi = \int \varepsilon\,dr. \tag{53}$$

Il en résulte (n° 40) que, pour satisfaire aux équations indéfinies de l'équilibre, il suffit d'exprimer que la dilatation cubique est constante. Or on déduit des valeurs (52)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - y^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{z^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\varepsilon. \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Il en résulte

$$\theta = \frac{d\varepsilon}{dr} + 2\frac{\varepsilon}{r}, \tag{55}$$

et l'on a, par conséquent, en désignant par c une constante,

$$\frac{d\varepsilon}{dr} + 2\frac{\varepsilon}{r} = 3c. \tag{56}$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\varepsilon = cr + \frac{b}{r^2}, \tag{57}$$

b étant une nouvelle constante arbitraire.

Par cette valeur de ε, les déplacements (52) satisfont

aux équations indéfinies; nous allons maintenant déterminer b et c, de manière à satisfaire aux équations définies.

45. Substituant à cet effet les valeurs (52) dans les expressions (40) des N, T, il vient

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_1 &= 2\mu\frac{yz}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right),\\ N_2 &= 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - y^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_2 &= 2\mu\frac{zx}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right),\\ N_3 &= 3\lambda c + 2\mu\left(\frac{z^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{r^2 - z^2}{r^2}\varepsilon\right), & T_3 &= 2\mu\frac{xy}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right). \end{aligned}\right.$$

On simplifie l'étude des tensions autour d'un point en faisant passer par ce point l'axe des x; on a ainsi $x = r$, $y = 0$, $z = 0$ et les valeurs (58) donnent

$$N_1 = 3\lambda c + 2\mu\frac{d\varepsilon}{dr},$$

$$N_2 = N_3 = 3\lambda c + 2\mu\frac{\varepsilon}{r}.$$

Les composantes tangentielles étant nulles, on voit que les tensions N_1, N_2, N_3 sont principales; la condition $N_2 = N_3$ montre que l'ellipsoïde des tensions est de révolution autour du rayon mené du centre au point considéré.

En remplaçant enfin ε par sa valeur (57), les expressions des tensions N deviennent

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 &= (3\lambda + 2\mu)c - \frac{4\mu b}{r^3},\\ N_2 = N_3 &= (3\lambda + 2\mu)c + \frac{2\mu b}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par r_0, r_1 les rayons des surfaces sphériques qui limitent intérieurement et extérieurement le solide et par P_0, P_1 les pressions qui s'exercent

normalement et uniformément sur ces surfaces; en exprimant que N_1 se réduit à $-P_0$ sur la surface intérieure et à $-P_1$ sur la surface extérieure, on a deux équations

$$(60)\quad \begin{cases} (3\lambda+2\mu)c - \dfrac{4\mu b}{r_0^3} = -P_0, \\ (3\lambda+2\mu)c - \dfrac{4\mu b}{r_1^3} = -P_1, \end{cases}$$

qui déterminent b, c, et, par les valeurs que l'on obtient ainsi, toutes les conditions d'équilibre sont satisfaites.

On tire des équations (60)

$$(61)\quad c = \frac{r_0^3 P_0 - r_1^3 P_1}{(3\lambda+2\mu)(r_1^3 - r_0^3)}, \qquad b = \frac{(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{4\mu(r_1^3 - r_0^3)},$$

et, en portant ces valeurs dans les formules (57) et (59), on obtient la solution complète du problème.

d. — Équilibre d'une couche cylindrique.

46. Soit un solide homogène et isotrope limité par deux cylindres de révolution concentriques et par deux plans perpendiculaires aux arêtes. Ce solide est soumis, sur chacune des surfaces cylindriques, à une pression normale et uniforme, et sur chacune des bases à une traction parallèle aux arêtes; on se propose de déterminer l'état d'équilibre.

Plaçant l'origine au centre de figure, prenons l'axe OZ parallèle aux arêtes; soient, dans l'état naturel x, y, z les coordonnées d'un point M du solide et r la distance de ce point à l'axe OZ, de sorte que

$$(62)\qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

Par suite de la déformation, le point M se déplace évidemment dans le plan méridien passant par sa position primitive, et l'on peut décomposer son déplacement en

deux : l'un ε suivant la direction de la distance r, l'autre w parallèle aux arêtes.

Nous supposerons que ε ne dépend que de r, et que w est proportionnel à z. Posant, en conséquence,

$$u = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad w = c z, \tag{63}$$

nous allons vérifier que l'on satisfait à toutes les conditions de l'équilibre par des valeurs convenables de la fonction ε et de la constante c.

47. Les valeurs (63) donnent d'abord

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varepsilon \frac{x\,dx + y\,dy}{r} + c\,z\,dz,$$

et l'on a, par la relation (62),

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr.$$

Il en résulte que l'expression précédente est égale à $\varepsilon\,dr + c z^2$. et qu'elle est par suite la différentielle totale de la fonction

$$\varphi = \int \varepsilon\,dr + \frac{1}{2} c z^2. \tag{64}$$

Les valeurs (63) des déplacements sont donc les dérivées partielles de la fonction φ et il suffit, pour satisfaire aux équations indéfinies de l'équilibre, d'exprimer que la dilatation cubique est constante. Or on déduit des valeurs (63)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3}\varepsilon, \\ \frac{dw}{dz} &= c. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Il en résulte

$$(66) \qquad 0 = \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} + c,$$

et, par suite, en désignant par a une constante, on peut écrire

$$(67) \qquad \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} = 2a.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$(68) \qquad \varepsilon = ar + \frac{b}{r},$$

et, en adoptant cette valeur, les déplacements satisfont aux équations indéfinies, quelles que soient les constantes arbitraires a, b, c; nous allons déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux équations définies ou conditions à la surface.

48. Substituons les valeurs (63) dans les expressions (40) des (N, T). En remarquant que, d'après les relations (66) et (67), on a

$$0 = 2a + c,$$

on trouve

$$(69) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_1 = 0, \\ N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\left(\frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3}\varepsilon\right), & T_2 = 0, \\ N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c & T_3 = 2\mu\frac{xy}{r^2}\left(\frac{d\varepsilon}{dr} - \frac{\varepsilon}{r}\right). \end{array} \right.$$

Pour simplifier l'étude des tensions autour d'un point, faisons passer par ce point le plan XOZ; on a alors

$$x = r, \qquad y = 0,$$

et les valeurs ci-dessus deviennent

$$N_1 = \lambda(2a + c) + 2\mu\frac{d\varepsilon}{dr}, \qquad T_1 = 0.$$

$$N_2 = \lambda(2a + c) + 2\mu\frac{\varepsilon}{r}, \qquad T_2 = 0,$$

$$N_3 = \lambda(2a + c) + 2\mu c, \qquad T_3 = 0.$$

Les composantes tangentielles étant nulles, les tensions N_1, N_2, N_3 sont principales. En remplaçant ε par sa valeur (68), les expressions de ces tensions peuvent s'écrire

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} N_1 &= 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r^2}, \\ N_2 &= 2(\lambda + \mu)a + \lambda c + \frac{2\mu b}{r^2}, \\ N_3 &= 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c. \end{aligned}\right.$$

Désignons maintenant par r_0, r_1 les rayons des surfaces cylindriques qui limitent intérieurement et extérieurement le solide, et par P_0, P_1 les pressions qui s'exercent normalement et uniformément sur ces surfaces; soit enfin F la traction appliquée sur l'unité de surface de chacune des deux bases. En exprimant que l'on a :

1° Sur la surface cylindrique intérieure, $N_1 = -P_0$;

2° Sur la surface cylindrique extérieure, $N_1 = -P_1$;

3° Sur la base, $N_3 = F$, on a trois équations

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r_0^2} &= -P_0, \\ 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - \frac{2\mu b}{r_1^2} &= -P_1, \\ 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c &= F, \end{aligned}\right.$$

qui déterminent a, b, c, et, par les valeurs que l'on obtient ainsi, toutes les conditions d'équilibre sont satisfaites.

La première et la deuxième des équations (71) donnent d'abord

$$(72)\qquad \begin{cases} 2(\lambda+\mu)a+\lambda c = \dfrac{r_0^2\,\mathrm{P}_0 - r_1^2\,\mathrm{P}_1}{r_1^2 - r_0^2}, \\[2ex] b = \dfrac{(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)r_0^2\,r_1^2}{2\mu(r_1^2-r_0^2)}, \end{cases}$$

et ces relations donnent les valeurs définitives de N_1, N_2. Enfin la troisième équation (71) et la première (72) donnent a et c, de sorte qu'on a le système de valeurs

$$(73)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda+2\mu}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,\dfrac{r_0^2\,\mathrm{P}_0 - r_1^2\,\mathrm{P}_1}{r_1^2-r_0^2} - \dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\,\mathrm{F}, \\[2ex] b = \dfrac{1}{2\mu}\,\dfrac{(\mathrm{P}_0-\mathrm{P}_1)r_0^2\,r_1^2}{r_1^2-r_0^2}, \\[2ex] c = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,\mathrm{F} - \dfrac{\lambda}{\mu(3\lambda+2\mu)}\,\dfrac{r_0^2\,\mathrm{P}_0 - r_1^2\,\mathrm{P}_1}{r_1^2-r_0^2}, \end{cases}$$

qui donne la solution complète du problème.

VI. — Mouvements intérieurs des systèmes isotropes.

49. *Équations des mouvements intérieurs.* — Considérons un système élastique homogène, isotrope, soustrait à toute force extérieure et indéfini dans tous les sens; supposons que les points de ce système, ayant été déplacés, soient abandonnés avec des vitesses initiales à l'action des forces intérieures. Le milieu se mettra en mouvement, et, si l'on désigne par u, v, w les projections du déplacement du point dont les coordonnées étaient x, y, z dans l'état d'équilibre, ces projections devront être considérées comme des fonctions de x, y, z et du temps t.

Ces fonctions satisfont aux équations (44) qui, en faisant abstraction des forces extérieures X_0, Y_0, Z_0,

deviennent

$$(74)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\,\Delta u=\rho\dfrac{d^2u}{dt^2},\\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\,\Delta v=\rho\dfrac{d^2v}{dt^2},\\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\,\Delta w=\rho\dfrac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

Le problème général des mouvements vibratoires consiste à trouver des fonctions u, v, w satisfaisant à ces trois équations aux dérivées partielles du second ordre, et telles que leurs valeurs initiales, ainsi que celles de leurs dérivées $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, soient des fonctions données des coordonnées x, y, z.

Nous nous bornerons à montrer, par un exemple simple, comment on peut, à l'aide des équations (74), étudier les propriétés de mouvements particuliers pour lesquels on connaît *a priori* la forme des fonctions qui représentent les déplacements.

50. *Mouvements simples.* — On appelle *mouvement simple* ou *mouvement par ondes planes* tout mouvement dans lequel les déplacements sont de la forme

$$(75)\quad \begin{cases} u=p\cos(ax+by+cz-st+\varphi),\\ v=q\cos(ax+by+cz-st+\varphi),\\ w=r\cos(ax+by+cz-st+\varphi), \end{cases}$$

p, q, r; a, b, c; s, φ désignant des constantes.

Examinons d'abord les propriétés générales de ces mouvements que l'on a à considérer dans un grand nombre de théories physiques.

51. Les formules (75) montrent d'abord que l'on a constamment

$$\frac{u}{p}=\frac{v}{q}=\frac{w}{r}.$$

de sorte que, pour un point quelconque, le mouvement est *rectiligne*.

Désignons par ρ la distance du point (x, y, z) au plan, passant par l'origine, représenté par l'équation

$$aX + bY + cZ = 0. \tag{76}$$

En posant

$$h^2 = a^2 + b^2 + c^2, \tag{77}$$

on a

$$h\rho = ax + by + cz,$$

et les formules (75) peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} u &= p\cos(h\rho - st + \varphi), \\ v &= q\cos(h\rho - st + \varphi), \\ w &= r\cos(h\rho - st + \varphi), \end{aligned}\right. \tag{78}$$

On en conclut que tous les points situés à la même distance du plan représenté par l'équation (76) sont, au même instant, déplacés de la même manière : de là la dénomination de mouvements par ondes planes donnée aux mouvements dont il s'agit.

52. Pour une valeur donnée de t, les déplacements u, v, w prennent les mêmes valeurs lorsque ρ s'accroît d'une quantité l, telle que $hl = 2\pi$; cette quantité, déterminée par la relation

$$l = \frac{2\pi}{h}, \tag{79}$$

représente ce que l'on appelle la *longueur d'ondulation*.

Pour une valeur donnée de ρ, les déplacements u, v, w prennent les mêmes valeurs lorsque t s'accroît d'une

quantité τ, telle que $s\tau = 2\pi$; cette quantité, déterminée par la relation

$$(80) \qquad \tau = \frac{2\pi}{s},$$

représente ce que l'on appelle la *durée de la vibration*.

Enfin, les valeurs des déplacements restent les mêmes si l'on fait croître t de Δt et φ de $\Delta\varphi$, pourvu que l'on suppose

$$(81) \qquad h\,\Delta\varphi - s\,\Delta t = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega,$$

la valeur de ω étant

$$(82) \qquad \omega = \frac{s}{h} = \frac{l}{\tau}.$$

La quantité ω, déterminée par la relation (82), représente la *vitesse de propagation*.

53. *Mouvements simples compatibles*. — Cherchons maintenant les conditions auxquelles doivent satisfaire les déplacements d'un mouvement simple pour que ce mouvement puisse se propager dans un milieu isotrope donné, c'est-à-dire soit *compatible* avec la constitution de ce milieu.

Les expressions (75) doivent alors satisfaire aux équations (74); si l'on pose, pour simplifier,

$$ax + by + cz - st - \varphi = \psi,$$

les valeurs (78) donnent

$$\theta = -(ap + bq + cr)\sin\psi, \qquad \frac{d\theta}{dx} = -a(ap + bq + cr)\cos\psi,$$

$$\Delta u = -h^2 p \cos\psi, \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = -s^2 p \cos\psi.$$

et la substitution de ces valeurs, dans la première des équations (74), donne, en supprimant le facteur commun $\cos\psi$, la première des équations

$$(83)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)a(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)p=0, \\ (\lambda+\mu)b(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)q=0, \\ (\lambda+\mu)c(ap+bq+cr)+(\mu h^2-\rho s^2)r=0, \end{cases}$$

les deux autres résultant de la substitution des valeurs (75), faite de la même manière, dans la seconde, puis dans la troisième des équations (74).

54. Si l'on ajoute les trois équations (83), respectivement multipliées par a, b, c, on trouve

$$(84)\qquad (ap+bq+cr)[(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2]=0.$$

Il faut donc que l'on ait, ou $(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2=0$, ou $ap+bq+cr=0$.

55. *Vibrations longitudinales.* — Dans le premier cas, la relation

$$(\lambda+2\mu)h^2-\rho s^2=0$$

donne, pour la vitesse de propagation $\omega=\frac{s}{h}$,

$$(85)\qquad \omega=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}.$$

De plus, puisque $\mu h^2-\rho s^2=-(\lambda+\mu)h^2$, les équations (83) donnent

$$(86)\qquad \frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}.$$

Or p, q, r sont proportionnels à u, v, w; a, b, c sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale au plan fixe représenté par l'équation (61); donc les relations (86) expriment que *la vibration est perpendiculaire au plan de l'onde.*

Les vibrations simples, normales à l'onde plane, se propageant avec la vitesse (85), sont dites *longitudinales*.

56. *Vibrations transversales.* — Dans le second cas, l'équation $ap + bq + cr = 0$ exprime que *la vibration s'effectue dans le même plan de l'onde*; de plus, les relations (83) se réduisent à

$$\mu h^2 - \rho s^2 = 0,$$

ce qui donne, pour la vitesse de propagation,

$$(87) \qquad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

La dilatation cubique, donnée par la formule $\theta = -(ap + bq + cr)\cos\psi$, est égale à zéro, de sorte que le mouvement a lieu sans que la densité du milieu soit altérée.

Les vibrations simples, parallèles à l'onde plane, se propageant avec la vitesse (87), sont dites *transversales*.

57. En résumé, les mouvements simples qui peuvent se propager dans un milieu homogène et isotrope appartiennent nécessairement à l'un des deux systèmes de vibrations, longitudinales ou transversales. Les vitesses de propagation, différentes pour les deux systèmes, ont, pour chaque système, une valeur déterminée restant la même quelles que soient les durées et les amplitudes des vibrations propagées. Enfin il est à remarquer que, dans tout mouvement longitudinal, la direction de la vibration est déterminée; le mouvement est *polarisé*. Au contraire, dans tout mouvement transversal, la vibration n'est assujettie qu'à être dans le plan de l'onde; son orientation dans ce plan peut être quelconque.

58. *Propagation de la lumière dans un milieu isotrope.* — Dans la théorie des ondulations, on attribue les phénomènes lumineux aux vibrations d'un milieu élastique particulier. On admet que, dans les corps non cristallisés, ce milieu peut être considéré comme isotrope et l'on suppose que ses vibrations sont régies par les équations (74), avec la condition spéciale $\lambda + 2\mu = 0$. En posant $\frac{\mu}{\rho} = e$, les équations peuvent alors s'écrire

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = e\left(\Delta u - \dfrac{d\theta}{dx}\right), \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} = e\left(\Delta v - \dfrac{d\theta}{dy}\right), \\ \dfrac{d^2 w}{dt^2} = e\left(\Delta w - \dfrac{d\theta}{dz}\right). \end{cases}$$

La condition $\lambda + 2\mu = 0$ attribue une valeur nulle à la vitesse de propagation des ondes longitudinales, de sorte que, par suite de l'hypothèse admise, le milieu ne peut propager que des ondes planes transversales, non polarisées avec la vitesse $\omega = \sqrt{e}$, la même dans toutes les directions.

59. *Propagation de la lumière dans un milieu cristallisé.* — On peut rattacher la théorie physique de la double réfraction cristalline à la théorie de l'élasticité en admettant que, dans un cristal transparent, il existe trois directions telles qu'en rapportant à ces directions les vibrations de l'éther, ces vibrations soient régies par les équations

$$(89)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dt^2} = e\left(\Delta u - \dfrac{d\theta}{dx}\right), \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} = f\left(\Delta v - \dfrac{d\theta}{dy}\right), \\ \dfrac{d^2 w}{dt^2} = g\left(\Delta w - \dfrac{d\theta}{dz}\right), \end{cases}$$

qui ne diffèrent de celles des corps isotropes que par la substitution de trois coefficients distincts e, f, g au coefficient unique e.

Pour qu'un mouvement, représenté par les formules (75), puisse se propager dans le milieu, il faut que les déplacements u, v, w satisfassent aux équations (89); en opérant comme au n° 53, on trouve les trois conditions

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} s^2 p &= e\,[\,h^2 p - a(ap + bq + cr)],\\ s^2 q &= f\,[\,h^2 q - b(ap + bq + cr)],\\ s^2 r &= g\,[\,h^2 r - c(ap + bq + cr)]. \end{aligned}\right.$$

Désignons par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à l'onde plane, de sorte que

$$l = \frac{a}{h}, \qquad m = \frac{b}{h}, \qquad n = \frac{c}{h}.$$

En divisant par h^2 les équations (90) et observant que $\frac{s}{h} = \omega$, il vient

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} (\omega^2 - e)\,p &= -\,el\,(lp + mq + nr),\\ (\omega^2 - f)\,q &= -\,fm\,(lp + mq + nr),\\ (\omega^2 - g)\,r &= -\,gn\,(lp + mq + nr). \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont linéaires et homogènes en p, q, r, et, en éliminant ces trois quantités, on a une équation du troisième degré en ω^2 donnant les vitesses différentes avec lesquelles une onde plane peut se propager dans la direction (l, m, n). Pour faire l'élimination, il suffit d'écrire les équations de la manière suivante :

$$(92)\qquad \frac{p}{\dfrac{el}{\omega^2 - e}} = \frac{q}{\dfrac{fm}{\omega^2 - f}} = \frac{r}{\dfrac{gn}{\omega^2 - g}} = -(lp + mq + nr)$$

On en déduit immédiatement l'équation

$$(93)\qquad \frac{el^2}{\omega^2 - e} + \frac{fm^2}{\omega^2 - f} + \frac{gn^2}{\omega^2 - g} + 1 = 0,$$

qui admet une *racine nulle*.

Pour cette racine, les équations (92) donnent

$$\frac{p}{l} = \frac{q}{m} = \frac{r}{n};$$

ces équations correspondent à un mouvement simple *longitudinal;* mais la condition $\omega^2 = 0$ montre que ce mouvement ne peut pas se propager.

Les deux autres racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(94) \qquad \frac{l^2}{\omega^2 - e} + \frac{m^2}{\omega^2 - f} + \frac{n^2}{\omega^2 - g} = 0,$$

qui coïncide avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel.

A chacune de ses racines correspond, d'après les équations (77), une direction déterminée de la vibration, de sorte que, dans chaque direction, se propagent, avec des vitesses différentes, deux ondes planes polarisées.

QUESTION PROPOSÉE.

1590. Δ étant le lieu des pôles d'une droite D par rapport à un système de coniques homofocales, trouver le lieu des points de rencontre de D et de Δ, lorsque D pivote autour d'un point fixe. (H. Valdo.)

ERRATA.

Page 443, lignes 2, 3 et 10, *au lieu de* symmédiane, *lisez* symédiane.

Page 461, lignes 18 et 19, *au lieu de* directes, *lisez* inverses.

Page 463, ligne 30, *au lieu de* huitième, *lisez* quatrième.

Même page, ligne 32, *au lieu de* les trois autres faisceaux, *lisez* les autres faisceaux.

LA THÉORIE DES CHANCES.

Calcul des Probabilités; par M. *J. Bertrand*, Membre de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. Paris, Gauthier-Villars et Fils; 1889.

Nous n'avons pas la prétention de juger le nouvel Ouvrage de M. Bertrand; nous avons pensé que le meilleur hommage à rendre à notre illustre Maître consistait à présenter une analyse substantielle de son Livre. Aussi bien, ceux de nos lecteurs qui sont étrangers à la doctrine des hasards nous sauront gré sans doute de leur offrir ici un résumé, dégagé de toute démonstration, des principes de cette théorie et de ses applications les plus importantes.

I. — L'énumération des chances.

La nature d'un événement aléatoire détermine un certain nombre de cas, tous également possibles, mais les uns favorables, les autres défavorables à l'arrivée de cet événement. Ce qu'il importe surtout de connaître, c'est le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas, et c'est ce rapport qui a reçu le nom de *probabilité*.

On jette deux dés n fois de suite; quelle est la probabilité d'amener au moins une fois *sonnez*, c'est-à-dire deux 6? Le nombre total des cas est 36^n; celui des combinaisons défavorables est 35^n; la probabilité est donc

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n;$$

d'où l'on voit qu'il y a infériorité de chances pour gagner en 24 coups et supériorité de chances pour gagner en 25 coups.

Tel est le problème qui, proposé à Pascal par le chevalier de Méré, a donné naissance aux premières recherches sur le calcul des chances.

On peut résoudre un certain nombre de problèmes à l'aide de la théorie des combinaisons et de la seule définition de la probabilité.

Au jeu de *passe dix,* l'un des joueurs jetait trois dés et gagnait si la somme des points amenés surpassait 10. Quelles étaient les probabilités des deux adversaires? Elles étaient égales. Si l'on jouait avec cinq dés au lieu de trois, quel nombre faudrait-il substituer à 10 pour laisser les chances égales? La théorie répond 17.

Deux candidats X et Z sont soumis à un scrutin de ballottage; l'urne renferme $n+k$ billets au nom de X, et n seulement au nom de Z; X sera donc élu. Mais quelle est la probabilité pour que, pendant toute la durée du dépouillement, X ne cesse de conserver l'avantage? Une analyse, d'ailleurs assez délicate, répond

$$\frac{k}{2n+k}.$$

Au jeu de la rencontre, on tire successivement d'une urne les m boules qu'elle contient, sans les remettre dans l'urne. Ces boules portent les numéros 1, 2, 3, ..., m. Quelle est la probabilité pour qu'une boule au moins sorte au rang marqué par le numéro qu'elle porte? Dès que m est égal ou supérieur à 9, cette probabilité diffère très peu de $1-\frac{1}{e}=0,63$.

Voilà quelques-uns des nombreux exemples traités dans le premier Chapitre. L'auteur insiste, en outre, sur les erreurs qui peuvent provenir d'une constatation imparfaite ou de l'inégale possibilité des divers cas. Le type des erreurs de ce genre est assurément le dilemme de d'Alembert : « l'événement arrive ou n'arrive pas; de là deux cas, dont un favorable; la probabilité de tout événement est donc $\frac{1}{2}$ ».

Il faut aussi se garder d'introduire, sans explication, l'infini dans les raisonnements. Choisir au hasard entre un nombre infini de cas possibles n'est pas une indication suffisante. Quelle est la probabilité pour qu'un plan, choisi au hasard dans l'espace, fasse avec l'horizon un angle moindre que 45°? La question étant mal posée peut donner lieu à des réponses contradictoires. On peut dire que la probabilité est $\frac{1}{2}$, puisque tous les angles entre 0° et 90° sont possibles, et que ceux entre 0° et 45° sont seuls favorables. On pourrait dire aussi que la proba-

bilité est 0,28; car, si par le centre d'une sphère on imagine le rayon perpendiculaire au plan, il faut, pour que l'angle en question soit inférieur à 45°, que l'extrémité du rayon tombe dans une zone dont le rapport à la demi-sphère est précisément 0,28.

II. — La probabilité totale et la probabilité composée.

L'évaluation directe du nombre des combinaisons est le plus souvent impraticable, tant ce nombre croît rapidement pour peu qu'augmente celui des objets combinés. Demande-t-on, par exemple, de répartir 459 personnes en 8 groupes de 51 membres chacun? Le nombre des distributions possibles ne renferme pas moins de 429 chiffres! D'ailleurs, si l'on pouvait toujours faire directement le compte des cas favorables et celui de tous les cas possibles, le Calcul des probabilités ne serait pas une science. A toute science, il faut des principes. Voici les deux plus simples parmi ceux qui servent de base au Calcul des probabilités :

Si l'on partage les cas favorables en plusieurs groupes, la probabilité de l'événement est la somme des probabilités pour qu'il appartienne à chacun des groupes. C'est le principe de la *probabilité totale.*

Quand un événement consiste dans le concours de plusieurs autres, sa probabilité est le produit des probabilités des événements simples dont il exige la réunion. C'est le principe de la *probabilité composée.*

Dans l'application du premier principe, il faut veiller, en formant les groupes, à ce qu'aucun des cas possibles ne soit omis ni répété. Dans l'application du second, il importe de regarder si les événements simples sont ou non indépendants les uns des autres; et, s'il y a dépendance, on doit calculer la probabilité de chaque événement simple, en tenant compte de ce que ceux qui le précèdent sont arrivés.

Ainsi la probabilité d'amener avec deux dés le point 3 ou le point 4 n'est pas la somme des probabilités pour amener 3 et pour amener 4, puisqu'on peut d'un même coup amener à la fois ces deux points.

Si, de deux météorologistes, dont les prédictions ont pour probabilités respectives p et p', l'un dit qu'il pleuvra demain et l'autre qu'il ne pleuvra pas, la probabilité pour qu'ils disent juste tous les deux n'est pas pp' : elle est nulle.

Les principes sont justes; ils s'appliquent à toutes les combinaisons des probabilités simples évaluées en nombre. Mais, si l'évaluation est imparfaite, les conséquences ne méritent aucun crédit.

C'est donc avec raison que M. Bertrand s'étend longuement dans le Chapitre II sur les précautions à prendre dans la mise en œuvre des deux principes fondamentaux. Après avoir donné des exemples remarquables de leur fausse interprétation, il traite un grand nombre de problèmes dont le choix est bien propre à captiver le lecteur en l'initiant à ce genre de recherches. Nous signalerons particulièrement les questions suivantes :

Quelle est la probabilité des brelans au jeu de la bouillotte?

Quelle est la probabilité de la chance favorable réservée au banquier dans le jeu de trente et quarante?

Au baccarat, est-il avantageux au ponte de demander une carte lorsqu'il a le point 5?

Les réponses aux deux premières questions résultent de formules ou de tableaux que nous ne saurions rapporter ici. Quant à la troisième, on peut dire : « Si, sans jouer au plus fin, dès le début de la partie, le ponte déclare franchement ses habitudes, il doit tirer à 5. Si les conventions du jeu permettent la ruse, il doit se tenir à 5, en faisant croire au banquier, s'il le peut, qu'il a l'habitude de tirer. »

III. — L'espérance mathématique.

On appelle *espérance mathématique* de celui qui prétend à une somme éventuelle la valeur probable de cette somme, c'est-à-dire le produit de la somme par la probabilité que le prétendant a de l'obtenir.

Dans tout jeu équitable, la mise de chaque joueur doit être égale à son espérance mathématique; et, par suite, *les mises des divers joueurs sont proportionnelles à leurs probabilités respectives de gagner.* C'est la règle des *paris.*

Lorsque des joueurs se séparent avant que la partie soit terminée, ils doivent partager l'enjeu proportionnellement aux probabilités respectives qu'ils auraient alors de gagner. C'est la règle des *partis* (compositio sortis).

Pierre a trois pièces de 5^{fr}, Paul en a deux. Chacun doit jeter ses pièces, et celui qui obtiendra le plus grand nombre de faces

prendra les cinq pièces. Le jeu est-il équitable? Nullement, il est avantageux pour Pierre, dont l'espérance mathématique, $\frac{200}{11}$, est supérieure à sa mise.

Plusieurs joueurs ayant déposé chacun 1^{fr} jettent tour à tour μ dés. L'enjeu total appartiendra à celui qui amènera la plus grande somme de points ou sera partagé entre ceux qui amèneront une même somme de points supérieure à celle obtenue par les autres joueurs. Pierre joue le premier, il amène k points; quel est le nombre d'adversaires le plus favorable à ses intérêts, c'est-à-dire le nombre d'adversaires qui lui laisse la plus grande espérance mathématique? La solution dépend d'une équation aisée à résoudre avec une table de logarithmes. Par exemple, si le nombre des dés est six et si Pierre a obtenu cinq 6 et un 5, le nombre d'adversaires le plus avantageux est 15144.

Parmi les questions que la considération de l'espérance mathématique permet de résoudre avec élégance et facilité, il convient encore de citer le problème de l'aiguille et celui de Pétersbourg.

Des lignes parallèles et équidistantes sont tracées sur un plan indéfini; on lance au hasard sur ce plan une aiguille. Quelle est la probabilité pour que l'aiguille, parvenue au repos, rencontre l'une des parallèles? La théorie répond

$$\frac{2l}{a\pi},$$

l étant la longueur de l'aiguille et a la distance de deux parallèles. De là résulterait un moyen, assurément plus curieux qu'utile, de calculer approximativement le rapport π de la circonférence au diamètre.

Le problème de Pétersbourg est resté célèbre à cause des controverses singulières qu'il a suscitées.

Pierre et Paul jouent à pile ou face aux conditions suivantes : Pierre payera à Paul 1^{fr} s'il amène pile au premier coup, 2^{fr} s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, 4^{fr} s'il n'amène pile qu'au troisième coup, ..., 2^{n-1} francs s'il n'amène pile qu'au $n^{\text{ième}}$ coup, et ainsi de suite, de manière que la partie ne se termine que lorsque Pierre aura amené pile. Quelle est l'espérance mathématique de Paul? Le calcul apprend que cette espérance est infinie. On a voulu voir là un paradoxe. Un tel jeu est déraisonnable, d'accord : il pourrait même devenir impra-

ticable si l'on introduisait la condition de déposer la mise chaque fois avant de jeter la pièce. Mais l'assertion du calcul est exacte, et rien ne saurait prévaloir contre elle, ni la doctrine de l'espérance morale de Daniel Bernoulli, ni les dissertations éloquentes de Buffon.

« Un ingénieur calcule la charge capable d'abaisser de $0^{m},50$ le tablier d'un pont. L'épreuve est inutile, imprudente, dangereuse; le poids calculé est-il moins juste? Il est mauvais de trop charger un pont, mauvais aussi de jouer trop gros jeu. Cela ne change ni la théorie du jeu, ni celle de l'élasticité. »

IV. — Les épreuves répétées et le théorème de Bernoulli.

La théorie des chances acquiert une grande importance, lorsque, au lieu de l'appliquer à la recherche de la probabilité d'un événement qui ne doit plus se reproduire, on considère des épreuves répétées un grand nombre de fois dans des circonstances identiques.

Soient p et q les probabilités de deux événements contraires A et B, en sorte que $p+q=1$. Désignons par la notation $(A_m B_{\mu-m})$ l'événement composé qui consiste dans m apparitions de A et $\mu-m$ apparitions de B, sur μ épreuves.

La probabilité de l'événement $(A_m B_{\mu-m})$ *est égale au* $(m+1)^{ième}$ *terme du développement du binôme* $(p+q)^m$ *ordonné suivant les puissances croissantes de* p.

Par exemple, si, dans une urne renfermant 4 boules blanches et 5 noires, on fait trois tirages successifs en remettant dans l'urne la boule sortie, la probabilité d'amener 1 blanche et 2 rouges sera

$$3.\frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{80}{243}.$$

Tel est le principe des *épreuves répétées*. On en déduit ce corollaire important :

Si le nombre μ *des épreuves est très considérable, l'événement composé le plus probable est* $(A_{\mu p}, B_{\mu q})$, c'est-à-dire *celui où les événements simples* A *et* B *entrent proportionnellement à leurs probabilités.* Cet événement composé, quoique étant le plus probable, n'a cependant qu'une probabilité très faible si μ est, comme nous le supposons, considérable.

On regarde ordinairement la valeur la plus probable μp du

nombre des apparitions de l'événement A comme une valeur normale à laquelle on rapporte les autres nombres d'arrivées de cet événement. Ainsi, l'on pose $m = \mu p - z$, z étant d'ailleurs positif ou négatif; il en résulte $\mu - m = \mu q + z$, en sorte que l'événement composé quelconque $(A_m B_{\mu-m})$; se trouve désigné par $(A_{\mu p-z} B_{\mu q+z})$ la quantité z est ce qu'on nomme l'*écart* relatif à cet événement. Si, par exemple, à pile ou face, sur 10000 épreuves, face se présente 5017 fois, on aura $\mu = 10000$, $p = \frac{1}{2}$, d'où $5000 - z = 5017$; l'écart sera donc -17.

Lorsque μ est un grand nombre, le calcul des termes du développement du binôme devient impraticable, même avec une Table de logarithmes; il faut avoir recours à la formule d'approximation de Stirling

$$1.2.3\ldots x = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x},$$

dont M. Bertrand donne une démonstration simple et naturelle.

A l'aide de cette formule, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \tag{1}$$

pour la valeur approchée de la probabilité de la combinaison $(A_{\mu p}, B_{\mu q})$ la plus probable.

On démontre en outre que, *si l'on pose*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx = \Theta(t), \tag{2}$$

on a

$$P = \Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right) \tag{3}$$

pour la probabilité que l'écart z soit compris entre α *et* $-\alpha$, c'est-à-dire pour que le nombre d'arrivées de l'événement A soit compris entre $\mu p - \alpha$ et $\mu p + \alpha$.

Enfin de cette formule remarquable, qu'on nomme *formule des écarts,* résulte aisément la proposition suivante :

Soient p la probabilité de l'événement A *et m le nombre des apparitions de cet événement sur* μ *épreuves; on peut prendre* μ *assez grand pour qu'il y ait une probabilité*

aussi voisine que l'on voudra de la certitude que l'écart relatif

$$p - \frac{m}{\mu}$$

devienne inférieur à toute quantité donnée.

C'est le théorème de Jacques Bernoulli.

Les géomètres du XVIIe siècle, Pascal, Fermat, Leibnitz, Huygens n'avaient guère en vue que le problème des partis, et le Calcul des probabilités n'était à leurs yeux qu'une science purement spéculative. C'est le théorème de Bernoulli qui, publié en 1713 dans l'*Ars conjectandi*, a donné à la théorie des chances sa valeur objective.

Outre la démonstration qui dérive de la formule des écarts, M. Bertrand donne du théorème de Bernoulli deux preuves plus élémentaires fondées sur la considération de la valeur probable du carré ou de la valeur absolue de l'écart. C'est sans doute par inadvertance que, dans le premier des deux Chapitres consacrés à ce sujet, le théorème n'a pas été énoncé en termes formels. « Le hasard corrige le hasard » est une image heureuse, mais qui devrait être immédiatement suivie d'un énoncé mathématique.

Le théorème de Bernoulli est susceptible de nombreuses applications : mais encore y a-t-il certaines précautions à prendre. Deux conditions sont indispensables, et il faut préalablement s'assurer qu'elles sont remplies : la probabilité doit rester constante pendant les épreuves; elle doit en outre avoir une valeur *objective*, c'est-à-dire bien déterminée indépendamment des renseignements connus, la même en un mot pour tous ceux qui l'évaluent sans se tromper. Par exemple, la probabilité pour qu'il pleuve demain, la probabilité pour qu'un homme âgé de 40 ans vive dans dix ans, sont subjectives et ne comportent pas l'application du théorème de Bernoulli. M. Bertrand se livre sur ce sujet à une dissertation un peu étendue, mais fort intéressante.

V. — La ruine des joueurs.

Pierre joue à un jeu équitable une série de parties. Sa mise à chaque partie est a et celle de son adversaire est b; en sorte que, à chaque partie, Pierre expose a francs avec une proba-

bilité égale à $\frac{a}{a+b}$ d'en gagner b. Plus b est grand, a restant le même, plus Pierre joue *gros jeu;* c'est une définition.

Or la formule des écarts montre que la probabilité P, pour qu'après μ parties la somme perdue ou gagnée par Pierre soit inférieure à une somme donnée S, a pour expression

$$P = \Theta\left(\frac{S}{\sqrt{2\mu ab}}\right).$$

La situation faite à Pierre par les conditions du jeu et par le nombre μ des parties dépend donc uniquement du produit μab. Plus Pierre joue gros jeu, c'est-à-dire plus b est grand a restant le même, moindre est le nombre μ des parties qu'il faut jouer pour amener la même situation, c'est-à-dire le même gain final ou la même perte; μ est inversement proportionnel à b. Ainsi supposons que, dans un cas, Pierre expose à chaque partie 10^{fr} pour en gagner autant, et que dans une seconde série il expose encore 10^{fr} pour en gagner 350, le jeu étant toujours, bien entendu, supposé équitable; il faudra dans ce second cas faire un nombre de parties 35 fois moindre que dans la première, 751 par exemple au lieu de 20000.

La quantité $1 - P$ représente la probabilité pour que la perte de Pierre, dans μ parties, aux conditions indiquées, soit plus grande que S. Or les Tables de la fonction Θ donnent

$$\Theta(0,09) = 0,10;$$

si donc on pose

$$\frac{S}{\sqrt{2\mu ab}} = 0,09,$$

et si l'on fait $a = b = 1$, la formule

$$\mu = (62,4)S^2$$

indiquera le nombre des parties nécessaires pour que la probabilité d'une perte supérieure à S soit égale à $\frac{9}{10}$. Ainsi, à 1^{fr} la partie, pour avoir une probabilité égale à $\frac{9}{10}$ de perdre 100^{fr}, 1000^{fr}, 10000^{fr}, 100000^{fr}, ..., il faudrait un nombre de parties égal à 624 mille, 62 millions 400 mille, 6240 millions, 624 milliards, etc.

La chance de perte est donc loin d'être effrayante quand le

nombre des parties est fixé d'avance, le règlement ayant lieu à la fin.

Cette application intéressante de la formule des écarts nous ramène à la théorie du jeu, qui se mêle, bon gré malgré, à toute exposition des principes du Calcul des probabilités.

La question de la ruine des joueurs et de la durée du jeu a préoccupé les géomètres les plus distingués, Huygens, Moivre, Lagrange, Laplace, Ampère, etc.; elle est cependant loin d'être épuisée, tant on peut changer les conditions et varier le point de vue.

Voici les principales questions traitées dans le Livre de M. Bertrand.

Pierre joue contre le public, c'est-à-dire contre tout venant, ou encore contre un adversaire infiniment riche. Le jeu est équitable ou non, mais les conditions sont invariables d'une partie à l'autre. Quelle est la probabilité pour qu'il finisse par se ruiner?

Désignons par p la probabilité que Pierre a de gagner à chaque partie, par a sa mise, par b celle de l'adversaire et par ε la quantité

$$(a+b)p-a,$$

que nous nommerons l'*avantage* de Pierre à chaque coup; avantage qui est nul quand le jeu est équitable et qui constitue en réalité une défaveur lorsqu'il est négatif.

Cela posé, le calcul montre que la ruine de Pierre est certaine si ε est négatif ou nul; si ε est positif, la certitude de ruine disparaît; c'est le cas du banquier dans les jeux publics. Par exemple, à la roulette ordinaire, la probabilité p du banquier à chaque partie est $\frac{19}{37}$, et, les mises étant égales, on a

$$\varepsilon = a(2p-1) = \frac{a}{37}.$$

La chance de ruine du banquier est

$$\left(\frac{18}{19}\right)^n,$$

n étant le rapport de sa fortune à la mise totale de l'un des coups. Cette chance est très faible; pour $n = 1000$, elle est plus petite que

$$0,00000\,00000\,00000\,00000\,0007.$$

Connaissant la fortune m de Pierre, on peut se demander quelle est la probabilité pour que Pierre, jouant contre le public, dans des conditions équitables, soit ruiné juste à la fin de la $\mu^{\text{ième}}$ partie. L'enjeu étant de 1^{fr} la partie, on trouve pour cette probabilité la valeur approchée très simple

$$\frac{m}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\mu\varpi}}\,e^{-\frac{m^2}{2\mu}},$$

d'où résulte la probabilité

$$1-\Theta\left(\frac{m}{\sqrt{2\mu}}\right)$$

pour que Pierre soit ruiné avant le $\mu^{\text{ième}}$ coup. Par exemple, si $m = 100^{\text{fr}}$, la probabilité pour que la ruine de Pierre précède la dix-millième partie est 0,3154. De la première formule on déduit encore que le nombre μ des parties pour lequel la probabilité de voir Pierre ruiné juste au $\mu^{\text{ième}}$ coup a la valeur maxima est

$$\mu = \frac{1}{3}m^2;$$

ce nombre est égal à 3333 quand m est égal à 100, et la probabilité maxima est

$$0,0000925.$$

Pierre et Paul, dont les fortunes sont respectivement A et B, font un nombre illimité de parties. Quelle est pour Pierre la probabilité P de ruiner Paul? Si le jeu est équitable, on a

$$P = \frac{A}{A+B}.$$

Quand le jeu n'est pas équitable, la réponse est moins simple; en désignant par a et b les mises à chaque coup, par p et $q = 1 - p$ les probabilités respectives de Pierre et de Paul pour gagner chaque partie, on a

$$P = \frac{\alpha^{A}-1}{\alpha^{A+B}-1},$$

α désignant la racine positive, autre que 1, de l'équation trinôme

$$pX^{a+b} - X^{a} + q = 0.$$

Le résultat se traduit aisément en langage ordinaire dans le cas particulier où $a = b = 1$ et $A = B$. Les chances de ruine pour les deux joueurs sont dans le rapport de p^A à q^A.

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre jusqu'à la ruine de l'un d'eux; A et B sont leurs fortunes primitives; a et b leurs mises à chaque partie, p et $q = 1 - p$ leurs probabilités respectives de gagner l'une quelconque des parties. Quelle est la valeur probable V du nombre des parties qui seront jouées? En d'autres termes, si l'on promet à une troisième personne, Jean, qui ne participe pas au jeu, 1fr par partie jouée, quelle est l'espérance mathématique de Jean? Lorsque le jeu est équitable, on a

$$V = \frac{AB}{ab};$$

le nombre probable des parties est proportionnel au produit des fortunes. Mais qu'arrive-t-il quand le jeu n'est pas équitable et quelle proposition faut-il substituer au théorème si élégant de M. Bertrand? L'étude de ce cas nous a conduit à une proposition qui se recommande aussi par sa simplicité; la formule est alors

$$V = \frac{(A + B)P - A}{(a + b)p - a},$$

où P désigne la probabilité, calculée dans l'alinéa précédent, pour que Pierre ruine Paul. En donnant au mot *avantage* le sens précis que nous avons indiqué au commencement de ce paragraphe, on peut dire : le nombre probable des parties est égal au rapport de l'avantage total de l'un quelconque des deux joueurs à l'avantage du même joueur dans chaque partie.

A propos de ce théorème, M. Bertrand signale une tentative de démonstration *a priori* qu'il propose comme un nouvel exemple de ces raisonnements en apparence fort plausibles, mais dépourvus de rigueur, auxquels on est particulièrement exposé dans la théorie des chances. Qu'on nous permette ici une réflexion. Les vues *a priori* procurent à l'esprit une satisfaction incontestable. Mais la plupart de ces démonstrations ne sont-elles pas suggérées par la connaissance préalable du résultat? Lorsque Poinsot disait : « les formules ne donnent que ce qu'on y a mis », ne plaidait-il pas un peu sa propre cause? Pris à la lettre, cet aphorisme de l'éminent géomètre ne serait rien moins que la négation de l'Algèbre. Les transformations

d'une équation algébrique ne sont au fond que des transformations de l'idée qu'elle exprime; mais, faites d'une main sûre d'après des règles connues, elles conduisent naturellement à des rapprochements qui, sans le secours des formules, resteraient souvent inaperçus.

Pierre et Paul jouent l'un contre l'autre avec des probabilités égales. Ils possèdent chacun n francs avant d'entrer au jeu; à chaque partie le perdant donne 1^{fr} au gagnant, et le jeu ne cesse que lorsque l'un quelconque des joueurs est ruiné. Quelle est la probabilité pour que le jeu se termine précisément à la fin de la $\mu^{\text{ième}}$ partie? Cette probabilité est nulle si $\mu - n$ est impair; mais, si $\mu - n$ est pair, l'expression de la probabilité, sans être compliquée, ne saurait être traduite simplement en langage ordinaire; elle contient en facteur un déterminant composé, chose assez curieuse, avec les coefficients de la fonction bien connue V_n que l'on rencontre dans la théorie de la division du cercle en parties égales. Pour $n = 2$ ou $n = 3$, ce déterminant se réduit à son terme principal et l'on obtient les résultats suivants : si la fortune primitive de chacun des joueurs est de 2^{fr}, la probabilité pour que le jeu cesse au $2\mu^{\text{ième}}$ coup est $\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}$, tandis que, si la fortune primitive est égale à 3^{fr}, la probabilité pour que le jeu se termine à la $(2\mu+1)^{\text{ième}}$ partie est $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\mu-1}$.

Les joueurs systématiques espèrent accroître leurs chances de gain en observant une certaine progression dans leurs mises, en réglant d'une certaine façon leurs entrées au jeu et leurs sorties. Pierre, par exemple, entre au jeu, supposé équitable, avec la résolution de continuer tant qu'il gagnera et de se retirer dès sa première perte. Il se dit que le nombre des parties pouvant être illimité, son bénéfice peut être immense, tandis que sa perte ne peut dépasser sa mise pour une seule partie. Pierre se leurre d'un vain espoir; p étant sa probabilité et $q = 1 - p$ celle de son adversaire pour gagner l'une quelconque des parties, et a_i et b_i désignant les mises des deux joueurs à la partie de rang i, la valeur probable des sommes que Pierre espère toucher a pour expression

$$pq(a_1+b_1)+p^2q(a_1+b_1+a_2+b_2)$$
$$+p^3q(a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3)+\dots.$$

tandis que la valeur probable de ses débours possibles est

$$qa_1 + pq(a_1 + a_2) + p^2q(a_1 + a_2 + a_3) + \ldots;$$

or ces deux valeurs sont égales, puisque, le jeu étant équitable, on a

$$p(a_i + b_i) = a_i.$$

Ce calcul n'était pas d'ailleurs indispensable. Toutes les combinaisons plus ou moins ingénieuses des joueurs systématiques sont illusoires ; si le jeu est équitable, l'espérance mathématique du joueur est pour chaque partie égale à celle de son adversaire, et cette égalité subsiste quels que soient la progression des mises et le nombre des parties. Le joueur peut accroître la valeur possible de son gain, mais en diminuant proportionnellement la probabilité de l'obtenir.

VI. — La probabilité a posteriori.

Après cette digression sur la durée du jeu, revenons aux principes; il n'en reste plus qu'un à exposer : c'est le théorème sur la probabilité des causes ou la *probabilité a posteriori*, que Bayes a fait connaître en 1763 dans les *Transactions philosophiques*.

Il résulte des principes de la probabilité totale et de la probabilité composée que, lorsqu'un événement E peut provenir de plusieurs causes C_1, C_2, ..., C_n qui s'excluent mutuellement, sa probabilité a pour expression

$$p_1q_1 + p_2q_2 + \ldots + p_nq_n,$$

q_i désignant la probabilité d'action *a priori*, c'est-à-dire avant toute épreuve, de la cause C_i, et p_i désignant la probabilité que la cause C_i, quand elle agit, donne à l'événement.

Mais, après l'épreuve, quand l'événement E est arrivé, la probabilité Q_i pour qu'il soit dû à l'action de la cause C_i diffère de q_i ; on lui donne le nom de *probabilité a posteriori* de la cause considérée.

Un exemple rendra la distinction très sensible : deux urnes, d'apparence semblable, renferment, la première, 6 boules blanches et 1 noire; la seconde, 2 boules blanches et 5 noires; l'événement consiste dans l'extraction d'une boule blanche. Les causes sont ici les deux urnes; leurs probabilités d'action

a priori sont $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$, puisque les urnes sont semblables. Les probabilités que le choix de l'urne donne à l'événement sont $p_1 = \frac{6}{7}$ pour la première urne et $p_2 = \frac{2}{7}$ pour la seconde; en sorte que la probabilité de la sortie d'une boule blanche est

$$\frac{1}{2}\frac{6}{7} + \frac{1}{2}\frac{2}{7} = \frac{4}{7}.$$

Posons maintenant la question d'autre sorte. Supposons que l'événement ait eu lieu, que la boule tirée soit blanche. Si l'on demande quelle est alors la probabilité Q_1 pour que la boule provienne de la première urne, on sent bien que Q_1 n'est pas égal à $\frac{1}{2}$, mais lui est supérieur.

La règle de Bayes a pour objet la détermination de ces probabilités *a posteriori* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Voici son énoncé :

Plusieurs causes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *peuvent produire un événement* E; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *sont les probabilités* a priori *de ces causes, et* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *sont les probabilités que chacune d'elles donne à l'événement. Quand l'événement* E *a eu lieu, la probabilité* Q_i *pour qu'il soit dû à la cause* C_i *est donnée par la formule*

$$(4) \qquad Q_i = \frac{p_i q_i}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n}.$$

En d'autres termes, les probabilités *a posteriori* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont proportionnelles aux produits de la probabilité *a priori* de chaque cause par la probabilité qu'elle donne à l'événement.

Dans l'exemple considéré ci-dessus, on a

$$Q_1 = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \frac{1}{4}.$$

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. Chaque boule porte un des n[os] 1, 2, ..., n. On connaît pour l'un quelconque i de ces numéros le rapport q_i du nombre des boules marquées i au nombre total des boules, et aussi le rapport p_i du nombre des boules blanches marquées i au nombre total des boules qui portent le même numéro. On a tiré une boule, elle est blanche : quelle est la probabilité Q_i pour qu'elle

porte le n° i? La solution est donnée par la formule (4) : ici ce sont les numéros qui représentent les causes.

Une urne contient μ boules, blanches ou noires, en proportion inconnue. On a fait n tirages, en remettant chaque fois dans l'urne la boule sortie. Les n tirages n'ont amené que des boules blanches. Quelle est la probabilité Q_μ pour que toutes les boules de l'urne soient blanches?

Toutes les hypothèses sur la composition de l'urne sont possibles : ce sont là les causes $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_\mu$. La cause C_i, relative au cas où l'urne serait composée de i boules blanches et de $\mu - i$ boules noires, donne à l'événement la probabilité $p_i = \left(\frac{i}{\mu}\right)^n$. Mais les probabilités, *a priori*, $q_1, \ldots, q_\mu$ des diverses compositions de l'urne restent complètement inconnues. La probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité *a posteriori* de la cause C_μ, contient donc dans son expression

$$Q_\mu = \frac{q_\mu}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^n q_1 + \left(\frac{2}{\mu}\right)^n q_2 + \ldots + \left(\frac{\mu}{\mu}\right)^n q_\mu}$$

les rapports inconnus de $q_1, q_2, \ldots, q_{\mu-1}$ à q_μ.

Le problème, tel qu'il est posé, est donc insoluble, les données étant insuffisantes. Il devient bien déterminé, si l'on admet que toutes les compositions de l'urne sont également possibles : les rapports en question sont alors égaux à l'unité et l'on a

$$Q_\mu = \frac{\mu^n}{1^n + 2^n + \ldots + \mu^n}.$$

Le problème serait encore déterminé, mais le résultat serait tout autre, si l'on admettait que la composition de l'urne a été faite au moyen d'un tirage au sort de la couleur blanche ou noire, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune des couleurs, ou, ce qui revient au même, en tirant à pile ou face la couleur de chaque boule. Alors, les probabilités *a priori* $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ seraient les divers termes du développement de $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^\mu$, et l'on aurait

$$Q_\mu = \frac{\mu^n}{\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} 2^n + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} 3^n + \ldots + \mu^n}.$$

Une indétermination du même genre se rencontrerait dans le problème suivant :

Une urne contient μ boules, blanches ou noires, en proportion inconnue. On a fait $m+n$ tirages, en remettant chaque fois dans l'urne la boule sortie. On a ainsi obtenu m boules blanches et n noires. Quelle est la composition la plus probable de l'urne?

Toutes les hypothèses sur la composition de l'urne étaient possibles avant l'épreuve. Le nombre x des boules blanches peut prendre toutes les valeurs entières entre o et μ; chacune de ces hypothèses sur la valeur de x donne à l'événement, c'est-à-dire à la sortie de m blanches et de n noires, la probabilité

$$\frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m\,1.2\ldots n}\left(\frac{x}{\mu}\right)^m\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^n;$$

mais la probabilité *a priori* de chacune de ces hypothèses sur la valeur de x reste inconnue, et le problème reste insoluble tant qu'on n'ajoute rien à l'énoncé.

Si l'on complète l'énoncé en regardant toutes les hypothèses, en nombre infini, comme également possibles, les quantités q qui figurent dans la formule de Bayes disparaissent, et les probabilités *a posteriori* Q deviennent simplement proportionnelles aux valeurs de p, c'est-à-dire aux valeurs de

$$x^m(\mu-x)^n.$$

La composition la plus probable de l'urne répondra donc à la valeur de x qui rend ce produit maximum ; et comme, d'après un théorème élémentaire, cette valeur de x est donnée par la relation

$$\frac{x}{m}=\frac{\mu-x}{n},$$

on voit que, dans la composition la plus probable, le rapport du nombre des boules blanches à celui des boules noires sera celui de m à n.

Si l'on complétait, au contraire, l'énoncé, en admettant, ce qui est plus rationnel, que la composition de l'urne a été fixée par le hasard, c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué au problème précédent, en tirant à pile ou face la couleur de chaque boule, le résultat serait bien différent. On trouve alors que, dans la composition la plus probable de l'urne, le rap-

port du nombre des boules blanches à celui des boules noires est, si μ est assez grand, égal au rapport de $\mu + 2m$ à $\mu + 2n$.

Il faut bien le dire : on a fait parfois de la règle de Bayes des applications bien peu judicieuses. Buffon a jeté 4040 fois une pièce de monnaie et a obtenu face 2048 fois. Quelle est la probabilité pour que la pièce fût imparfaite et eût une tendance à favoriser face? La question est insoluble, les données manquent, la probabilité *a priori* de telle ou telle imperfection de la pièce est inconnue. Poisson l'a cependant calculée. Mais son raisonnement suppose que, si l'on désigne respectivement par $\frac{1}{2} + z$ et $\frac{1}{2} - z$ les probabilités données par la pièce à l'arrivée de face et à l'arrivée de pile, toutes les valeurs de z entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ soient également possibles *a priori*. Il trouve 0,81 pour la probabilité que z soit positif. M. Bertrand fait voir que, si la pièce n'avait été jetée qu'une fois et qu'elle eût montré face, un calcul fondé sur le même principe donnerait 0,75 pour la probabilité que la pièce eût une tendance à favoriser face. Or, dans ce cas, l'événement ne saurait évidemment rien apprendre sur la qualité de la pièce. Que vaut donc le principe du calcul de Poisson?

La liste serait longue des erreurs de ce genre, que M. Bertrand se plaît à relever, saisissant ainsi l'occasion d'exercer sa verve étincelante, pour la grande joie de ses lecteurs.

Un corollaire important du théorème de Bayes est relatif à la recherche de la probabilité des événements futurs déduite des événements observés. Le voici :

Soient E *et* E′ *deux événements dépendant l'un et l'autre des causes* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *dont les probabilités* a priori *sont* $q_1, q_2, \ldots, q_n$; *soient encore* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *les probabilités que ces causes donnent à l'événement* E, *et* $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ *les probabilités qu'elles donnent à l'événement* E′. *La probabilité pour que, l'événement* E *ayant eu lieu, l'événement* E′ *se produise, a pour expression*

$$(5)\qquad \frac{p_1 p'_1 q_1 + p_2 p'_2 q_2 + \ldots + p_n p'_n q_n}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n}.$$

Par exemple, une urne contient des boules blanches et des

boules noires en proportion inconnue; toutes les hypothèses sur la composition de l'urne sont supposées également possibles. On a fait $m+n$ tirages, en remettant chaque fois dans l'urne la boule sortie. On a amené de la sorte m boules blanches et n noires. Quelle est la probabilité pour qu'un nouveau tirage donne une boule blanche? On trouve

$$\frac{m+1}{m+n+2}.$$

Plus encore peut-être que le théorème de Bayes, cette formule a donné lieu à des applications ridicules. Condorcet n'est-il pas allé jusqu'à en déduire la probabilité pour que le Soleil se lève demain! Mais comment accepter l'assimilation entre la probabilité de voir le Soleil se lever et celle d'extraire une boule blanche? L'une des probabilités est subjective, l'autre est objective. D'après Condorcet, la probabilité de voir le Soleil se lever a donc été $\frac{2}{3}$ au lendemain de la création de l'homme, $\frac{3}{4}$ au surlendemain, $\frac{4}{5}$ au jour suivant, $\frac{366}{367}=0,997$ au bout d'une année; elle serait

$$\frac{2191501}{2191502}=0,999\,999$$

après six mille ans.

Si la croyance au lever du Soleil s'est changée en certitude, « c'est par la découverte des lois astronomiques et non par le succès renouvelé d'un même jeu de hasard ».

VII. — La loi de probabilité des erreurs fortuites.

Parmi les applications de la doctrine des chances, celle qui offre le plus d'intérêt est relative à la combinaison des erreurs d'observation.

Il semblait qu'il n'y eût guère qu'à glaner dans un champ si habilement exploité par Gauss : on va voir cependant quelle moisson abondante M. Bertrand a su encore y recueillir. Mais, avant d'analyser les quatre Chapitres consacrés à ce sujet, nous devons préciser le problème à résoudre.

Les erreurs inhérentes à la mesure de toute grandeur phy-

sique sont dites *systématiques* ou *fortuites*, suivant que les causes qui les produisent sont permanentes et régulières ou irrégulières et accidentelles. Les erreurs provenant d'une imperfection spéciale de l'instrument employé, d'une tendance particulière de l'observation, d'une défectuosité de la théorie, etc., se rapportent à la première classe, tandis qu'il faut ranger dans la seconde les erreurs dues à l'imperfection générale de nos sens, aux ébranlements de l'air, aux trépidations des supports, etc. Nous excluons de la recherche actuelle les erreurs systématiques : c'est à l'observation qu'il appartient de rechercher les causes qui peuvent engendrer une erreur constante, pour apprécier leur effet et en purger les observations. Il en est tout autrement des erreurs fortuites; on est obligé de les tolérer, et c'est par une combinaison habile des résultats qu'on peut réduire leur influence.

La question se pose dès lors en ces termes :

On a déterminé, à l'aide d'observations faites avec le même soin, les valeurs

$$r_1, \; r_2, \; \ldots, \; r_n$$

de n fonctions,

$$f_1(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots), \quad f_2(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots), \quad \ldots, \quad f_n(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \ldots),$$

de m inconnues U, V, W, ...; n est plus grand que m. On demande de trouver les *meilleures* valeurs de U, V, W, ...

A chaque système u, v, w, ... de valeurs attribuées à U, V, W, ... répondent des différences

$$\begin{array}{l} f_1(u, v, w, \ldots) - r_1, \\ f_2(u, v, w, \ldots) - r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(u, v, w, \ldots) - r_n \end{array}$$

entre les valeurs calculées et les valeurs observées. On donne à ces différences le nom de *résidus*.

L'idée qui s'offre la première serait de choisir les valeurs de u, v, w, ... qui rendent minimum la somme des valeurs absolues des résidus. Mais, comme l'Analyse mathématique se prête mal à cette condition, Legendre a été conduit à considérer une somme de puissances paires des résidus, et particulièrement la somme de leurs carrés, afin d'éviter la complication des calculs. La méthode à laquelle il a donné le nom de *méthode des*

moindres carrés consiste donc dans le choix des valeurs de u, v, w, ... qui rendent les sommes des carrés des résidus minima.

Ces considérations n'ont, il est vrai, rien de rigoureux; mais il faut reconnaître aussi que la question a été posée d'une manière un peu vague. L'énoncé devient plus précis lorsque, au lieu de demander les valeurs les meilleures, on demande les valeurs les plus probables.

Seulement une nouvelle question surgit alors : quelle est la *loi de probabilité des erreurs fortuites?* Voici ce qu'il faut entendre par là :

D'après le principe de la probabilité totale, si un intervalle se compose de plusieurs autres, la probabilité pour qu'une erreur tombe dans l'intervalle total est la somme des probabilités pour qu'elle tombe dans chacun des intervalles partiels. La probabilité pour qu'une erreur tombe entre x et $x + dx$ est donc la différentielle $\varphi(x)\,dx$ de la fonction qui exprime la probabilité pour que l'erreur tombe entre o et x, et la probabilité pour qu'une erreur tombe entre a et b est exprimée par l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

La recherche de la fonction $\varphi(x)$, qu'on nomme la *facilité* de l'erreur x, est donc la première à entreprendre.

Disons tout de suite avec Gauss que, à proprement parler, cette recherche est vaine : « *Vix, ac ne vix quidem, nunquam in praxi possibile erit, hanc functionem a priori assignare.* » On ne saurait découvrir ce qui n'existe pas; mais on peut chercher une expression analytique qui traduise fidèlement les caractères généraux des erreurs fortuites et que ses conséquences justifient.

Tout le monde s'accorde à reconnaître aux erreurs fortuites les trois caractères suivants : deux erreurs égales et de signes contraires ont la même probabilité; dans une même série d'observations, toutes les erreurs restent comprises entre deux limites très resserrées $-l$ et $+l$, dont la valeur absolue dépend du genre des observations; enfin, entre les limites $-l$ et $+l$, les erreurs sont réparties de telle façon que les plus petites soient notablement les plus probables.

Il résulte de là que $\varphi(x)$ doit être une fonction impaire.

prenant sa valeur maximum pour $x = 0$, puis décroissant rapidement quand x varie de o à $\pm l$, de manière à avoir des valeurs insensibles entre $-l$ et $-\infty$, ainsi qu'entre $+l$ et $+\infty$; on a d'ailleurs par là même

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Ces diverses propriétés sont insuffisantes pour déterminer $\varphi(x)$. Mais il n'en est plus ainsi lorsque les observations sont assez bien faites pour que les carrés et les produits des erreurs soient négligeables; dans ce cas, comme le démontre M. Bertrand, on a

$$(7) \qquad \varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2x^2}.$$

La dernière condition énoncée est en général remplie dans la pratique; c'est ce qui explique pourquoi cette formule se trouve si bien justifiée par ses conséquences.

Cette loi de probabilité des erreurs fortuites a été donnée pour la première fois par Gauss, dans sa *Théorie du mouvement des corps célestes*. La méthode des moindres carrés en est un corollaire immédiat. Dans le cas particulier où il s'agit d'une même grandeur X dont on fait n mesures x_1, x_2, ..., x_n, la méthode donne la moyenne arithmétique

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

pour la valeur la plus probable de X.

C'est en quelque sorte la marche inverse de la précédente que Gauss a suivie pour établir la formule (7). Il prend pour point de départ cette proposition regardée comme un axiome : la moyenne arithmétique entre plusieurs mesures est la valeur la plus probable.

Après avoir rapporté la démonstration de Gauss, M. Bertrand se pose une question intéressante et qu'il résout avec beaucoup de bonheur : si, au lieu de prendre la moyenne arithmétique pour valeur la plus probable, on attribuait cette propriété à une autre fonction

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

des n mesures, existerait-il une loi correspondante de probabilité des erreurs? La réponse est négative; elle s'exprime élégamment : l'existence d'une loi de probabilité impose à la fonction ψ une forme telle que, si l'on donne à toutes les mesures prises, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un même accroissement quelconque α, la fonction croisse elle-même de α.

Pour compléter l'étude de la loi de Gauss, il faut indiquer la signification du paramètre k, apprendre à calculer pour chaque série d'observations la valeur correspondante de ce paramètre, enfin montrer comment on a pu vérifier l'exactitude de la formule (7).

Quand on a effectué sur un angle deux séries de mesures, en changeant d'instrument d'une série à l'autre, si une erreur d'une minute dans le premier système est aussi probable qu'une erreur d'une seconde dans l'autre, chacun s'accordera à reconnaître que le second système de mesures est 60 fois plus précis que le premier. Nous dirons donc, d'après cela et d'une manière générale, que la précision P d'un système de mesures est α fois plus grande que la précision P' d'un autre système, si la probabilité d'une erreur comprise entre z et $z + dz$ pour une mesure du premier système est égale à la probabilité d'une erreur comprise entre αz et $\alpha z + d.\alpha z$ dans une mesure du second. La condition

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 z^2}\, dz = \frac{k'}{\sqrt{\pi}} e^{-k'^2 \alpha^2 z^2} \alpha\, dz,$$

exige $k = \alpha k'$ et, par suite,

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}'} = \alpha = \frac{k}{k'}.$$

La précision d'un système d'observations sera donc mesurée par la valeur correspondante k du paramètre, si l'on prend pour unité de précision celle d'un système dont le paramètre serait égal à 1.

Voyons maintenant comment on peut *calculer la valeur de k qui répond à un système de mesures.*

Plaçons-nous d'abord dans le cas où les mesures portent sur une grandeur dont la valeur serait exactement connue.

On calculera alors en fonction de k l'expression $f(k)$ de la valeur probable d'une puissance quelconque x^i de l'erreur; et,

comme, en vertu du théorème de Bernoulli, sur un grand nombre n d'épreuves, la valeur probable d'une quantité diffère peu de la moyenne arithmétique, si l'on désigne par

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

les erreurs successivement commises dans les n observations, on aura la relation approximative

$$\frac{e_1^i + e_2^i + \ldots + e_n^i}{n} = f(k),$$

d'où l'on déduira k. Si, pour abréger l'écriture, on représente par S_i le numérateur du premier membre, on trouve pour k les expressions

$$\frac{n}{S_1\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{n}{2S_2}}, \quad \sqrt[3]{\frac{n}{S_3\sqrt{\pi}}}, \quad \sqrt[4]{\frac{3n}{4S_4}}, \quad \ldots,$$

dont la concordance constitue une véritable vérification de la loi de probabilité des erreurs. Les deux premières sont les plus simples, et l'on démontre qu'entre les deux c'est la seconde

$$(8) \qquad \frac{1}{2k^2} = \frac{S_2}{n}$$

qui mérite le plus de crédit. M. Bertrand fait connaître plusieurs autres formules pouvant remplacer les précédentes, et parmi lesquelles nous signalerons celle-ci :

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{S_2}{n+2},$$

qui est analogue à (8) et probablement plus exacte.

Voici encore, pouvant servir au même objet, plusieurs résultats bien dignes de remarque à cause de leur simplicité. Si l'on groupe les observations deux à deux, en chargeant le hasard de les associer, et que dans chaque groupe on choisisse la plus grande des deux erreurs, M. Bertrand trouve, pour les valeurs probables de cette erreur et de son carré,

$$\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Si l'on groupait au hasard les erreurs trois par trois, la

valeur probable du carré de la plus grande des trois serait

$$\frac{1}{2k^2}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right),$$

etc.

Les formules que nous venons d'indiquer pour le calcul de k renferment les erreurs vraies, puisque nous avons supposé que la grandeur considérée était exactement connue; dans la pratique, la grandeur considérée X n'est connue que par les mesures $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qu'on en a prises. Comment alors calculer k? Tout simplement en substituant, dans l'une des formules précédentes, aux erreurs vraies qu'on ne connaît pas, les erreurs présumées, c'est-à-dire les différences entre les mesures x_1, $x_2, \ldots, x_n$ et leur moyenne arithmétique ξ qui est la valeur la plus probable de X. Ainsi, à la formule

$$(8)\qquad \frac{1}{2k^2}=\frac{(X-x_1)^2+\ldots+(X-x_n)^2}{n},$$

on substituera la suivante

$$(9)\qquad \frac{1}{2k_1^2}=\frac{(\xi-x_1)^2+\ldots+(\xi-x_n)^2}{n},$$

qui déterminera approximativement le paramètre.

Mais on peut faire un peu mieux. On déduit de (8) et (9), par un calcul facile, la relation

$$\frac{1}{2k_1^2}=\frac{1}{2k^2}\,\frac{n-1}{n}-\frac{2}{n}\sum e_i e_{i'},$$

où e_i représente l'erreur vraie $X-x_i$ et d'où l'on déduit, en négligeant le dernier terme, dont la valeur probable est nulle,

$$\frac{1}{2k_1^2}=\frac{1}{2k^2}\,\frac{n-1}{n}.$$

D'après cela, on déterminera finalement le paramètre k par la formule

$$(10)\qquad \frac{1}{2k^2}=\frac{(\xi-x_1)^2+\ldots+(\xi-x_n)^2}{n-1},$$

qui, depuis Gauss, est adoptée.

M. Bertrand ne pouvait manquer de signaler le point faible de la démonstration. « Une grandeur », dit-il, « dont la valeur

probable est petite, est certainement petite elle-même quand elle est essentiellement positive; mais, quand elle peut, comme ici, changer de signe, la valeur probable étant nulle, cela prouve seulement que les valeurs positives ont même probabilité que les négatives. » Cela est parfaitement vrai; mais il n'en résulte pas non plus qu'elles soient fort grandes. C'est à l'expérience à décider; elle donne raison à Gauss et à ses adeptes. D'ailleurs, la formule (8) n'est pas mathématiquement rigoureuse, et si l'on compare la formule (10) à la suivante

$$(11) \qquad \frac{1}{2k^2} = \frac{(\xi - x_1)^2 + \ldots + (\xi - x_n)^2}{n},$$

que l'on déduit immédiatement de (8) en substituant les erreurs présumées aux erreurs vraies, on voit que la formule (11) fournira pour k une valeur plus grande que la formule (10); on risque donc moins en choisissant la relation (10), qui attribue au résultat une précision moindre. Enfin, dans le cas extrême où l'on ne mesurerait la grandeur qu'une fois, la formule (11), ayant alors son numérateur nul et son dénominateur égal à 1, est absurde : elle accuse une précision infinie alors qu'on n'a aucune donnée sur la précision; la formule (10) est plus logique, elle donne $\frac{0}{0}$.

Nous avons indiqué comment la comparaison des diverses expressions que l'on peut employer pour calculer k permettait de vérifier la loi de Gauss. La vérification directe a été entreprise, la première fois, par Bessel; elle est fondée sur ce que, dans une série suffisamment nombreuse d'observations, si l'on partage les erreurs en groupes bien définis, chaque groupe se présentera, en vertu du théorème de Bernoulli, un nombre de fois à peu près proportionnel à sa probabilité. Bessel a étudié 470 observations de Bradley portant sur les coordonnées, aujourd'hui bien connues, d'une même étoile. Après avoir réduit soigneusement les mesures de ce « modèle des observateurs », Bessel a classé les erreurs par ordre de grandeur; il a compté le nombre des erreurs, tant positives que négatives, qui étaient renfermées dans chacun des intervalles $0^s,0$ et $0^s,1$, $0^s,1$ et $0^s,2$, ..., et il a comparé les nombres ainsi obtenus avec les nombres probables que donne, pour les erreurs de chaque groupe, la formule de Gauss. L'accord est plus satisfaisant qu'on ne l'eût espéré. L'épreuve a été depuis renouvelée bien des fois.

et toujours avec le même succès, pour diverses séries d'observations préalablement purgées de toute erreur systématique.

La loi de probabilité des erreurs permet de prévoir, lorsque les épreuves sont nombreuses, tous les détails relatifs à la série des erreurs commises. M. Bertrand en donne des exemples intéressants.

Nous signalerons particulièrement celui-ci :

On a mesuré n fois une grandeur : tout est régulier; après avoir déterminé k, on calcule l'erreur λ telle que la probabilité pour qu'une erreur soit inférieure à λ ait une valeur donnée p; puis on rejette toutes les mesures dont les différences avec la moyenne sont moindres que λ, et l'on prend pour valeur approchée de la grandeur, au lieu de la moyenne générale, la moyenne des mesures réservées, dont le nombre m diffère peu de np. Y a-t-il avantage à opérer de la sorte? La réponse est affirmative en supposant, bien entendu, que m soit un grand nombre. M. Bertrand calcule la valeur probable du carré de l'erreur, et il trouve que, dans le second cas, elle est multipliée par un facteur qui décroît sans limite quand λ diminue.

VIII. — Le tir a la cible.

A la loi de probabilité des erreurs fortuites se rattache la formule de Bravais sur les *erreurs de situation d'un point*.

La probabilité d'une erreur comprise entre u et $u + du$ pour l'abscisse et entre v et $v + dv$ pour l'ordonnée d'un point a pour expression

$$(12) \qquad P = \frac{\sqrt{k^2 k'^2 - \lambda^2}}{\pi} e^{-k^2u^2 - 2\lambda uv - k'^2v^2} du\, dv.$$

On est amené à cette formule par l'application de la loi de Gauss, suivie de quelques transformations analytiques. On en déduit cette proposition, énoncée en 1709 par Cotes : si plusieurs positions ont été obtenues, qui méritent la même confiance, la position la plus probable du point sera le centre des moyennes distances des positions obtenues.

On peut, inversement, prendre pour point de départ le théorème de Cotes considéré comme un postulatum et remonter à la formule (12).

Cette formule s'applique à la probabilité des écarts dans le tir à la cible.

La première question à résoudre est alors la détermination des valeurs des constantes k, k', λ pour un certain tireur et pour une arme donnée. On y parvient de la manière suivante : désignons par u et v les coordonnées du point où frappe la balle par rapport à deux axes passant par le centre des moyennes distances de tous les points frappés (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., (u_n, v_n), supposés en très grand nombre ; on exprimera en fonction des constantes k, k', λ les valeurs probables de u^2, v^2 et de uv ; puis on égalera ces expressions aux quantités

$$A = \frac{1}{n}(u_1^2 + \ldots + u_n^2),$$

$$B = \frac{1}{n}(v_1^2 + \ldots + v_n^2),$$

$$C = \frac{1}{n}(u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n);$$

on aura de la sorte, en vertu du théorème de Bernoulli, des relations suffisamment approximatives, d'où l'on tirera les valeurs

$$\frac{k^2}{B} = \frac{k'^2}{A} = -\frac{\lambda}{C} = \frac{1}{2(AC - B^2)}$$

des constantes.

Cela fait, si l'on pose

$$k^2 u^2 + 2\lambda uv + u'^2 v^2 = H,$$

la probabilité pour que, pour l'arme et le tireur considérés, une balle tombe entre les deux ellipses correspondant à H et $H + dH$ aura pour expression

$$e^{-H^2} dH.$$

Par suite, la probabilité pour que la balle frappe en dehors de l'ellipse correspondant à une valeur H_1 du paramètre H sera e^{-H_1}.

Les neuf ellipses semblables, correspondant aux neuf valeurs

0,10536	0,22315	0,35669	0,51082
0,69315	0,91329	1,20677	1,60944
2,30359			

du paramètre H, partageront le plan en 10 régions, contenant très vraisemblablement chacune le dixième du nombre des balles tirées. La première de ces régions est la plus petite de ces ellipses; la dernière est la portion indéfinie du plan située au delà de la plus grande ellipse.

M. Bertrand a appliqué les résultats précédents à l'examen de 1000 coups tirés par des tireurs habiles, à 200^m de distance, avec dix armes de même modèle, chaque tireur tirant 10 coups avec chaque arme. Les nombres de balles, qui devaient être théoriquement tous égaux à 100 pour chacune des dix régions, ont été trouvés égaux à

99, 106, 100, 108, 100, 115, 89, 94, 90, 97.

L'accord, comme on le voit, est assez satisfaisant pour confirmer la théorie.

IX. — La méthode des moindres carrés.

Dans le cas général, au lieu de n mesures d'une même grandeur, on a à considérer les valeurs r_1, r_2, ..., r_n, fournies par l'observation, de n fonctions

$$f_1(U, V, W, \ldots), \quad f_2(U, V, W, \ldots), \quad \ldots, \quad f_n(U, V, W, \ldots),$$

de m inconnues U, V, W, ..., m étant plus grand que n. L'application immédiate du principe de la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire la recherche des valeurs u, v, w, ..., qui rendent minimum la somme des carrés des résidus

$$\begin{gathered} f_1(u, v, w, \ldots) - r_1, \\ f_2(u, v, w, \ldots) - r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(u, v, w, \ldots) - r_n, \end{gathered}$$

conduirait à des calculs inextricables sans une circonstance heureuse qui se présente toujours dans la pratique, et qui consiste en ce que l'on connaît d'avance des valeurs approchées A, B, C, ... des inconnues U, V, W, ..., telles que l'on soit en droit de négliger les carrés et les produits des différences U — A, V — B, W — C, ..., que nous désignerons res-

pectivement par X, Y, Z, ...; on a alors, en négligeant x^2, y^2, ..., xy, xz, ...,

$$f_i(U, V, W, \ldots) - f_i(A, B, C) = X\frac{\partial f_i}{\partial A} + Y\frac{\partial f_i}{\partial B} + Z\frac{\partial f_i}{\partial C} + \ldots,$$

et comme $f_i(U, V, W, \ldots)$ est donné par l'observation et que $f_i(A, B, C, \ldots)$ et ses dérivées sont immédiatement calculables, le problème est ramené à la recherche des valeurs de x, y, z, ... qui rendent minimum la somme des carrés des n fonctions linéaires

$$(13)\quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots - l_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots - l_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots - l_n, \end{cases}$$

où les coefficients a, b, c, ... sont exactement connus et où les quantités l résultent de l'observation.

Une règle bien connue du Calcul différentiel donne, pour déterminer ces valeurs, le système des m équations à m inconnues

$$(14)\quad \begin{cases} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots = [al], \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + \ldots = [bl], \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + \ldots = [cl], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

que l'on nomme *équations normales* et dans lesquelles la notation $[uv]$, empruntée à Gauss, désigne la somme

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

La règle pour former les équations normales est fort simple : on égale à zéro la somme des produits obtenus en multipliant chacune des fonctions (13) par le coefficient de x dans cette fonction; on opère de même pour y, z, ...

Il ne suffit pas de résoudre les équations normales, il faut encore déterminer le degré de confiance à accorder aux valeurs ainsi obtenues.

Nous avons vu qu'à toute série de mesures répondait une valeur de paramètre k qui figure dans la loi des erreurs fortuites et que la précision d'une mesure du système considéré était proportionnelle à k. Si k est proportionnel au degré de confiance, son inverse est au contraire proportionnel à l'erreur à

craindre; mais nous savons aussi que la valeur probable du carré de l'erreur a pour expression

$$\frac{1}{2k^2}.$$

On est ainsi conduit à donner le nom d'*erreur à craindre* à la racine carrée $\frac{1}{k\sqrt{2}}$ de la valeur probable du carré de l'erreur; c'est l'erreur à craindre sur chacune des valeurs trouvées pour les inconnues, qu'il convient de calculer.

On s'appuie pour cela sur un théorème dû à Gauss et qui, à cause de son emploi fréquent, mérite d'être rapporté, bien qu'il ne soit pas énoncé dans le livre de M. Bertrand.

Si U, V, W, ... sont des grandeurs indépendantes entre elles et si u, v, w, ... désignent respectivement les erreurs à craindre sur chacune d'elles, l'erreur à craindre E sur une fonction quelconque f(A, B, C, ...) de ces quantités a pour expression

$$(15) \quad E = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)^2 u^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 v^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)^2 w^2 + \ldots}.$$

En appliquant cette règle à l'expression de x en fonction de l_1, l_2, ..., l_n que donne la résolution des équations normales, on trouve, pour l'erreur à craindre E_x sur l'inconnue x,

$$E_x = \varepsilon\sqrt{x'}.$$

Dans cette formule, ε désigne l'erreur à craindre sur les mesures l_1, l_2, ..., l_n, et x' est la valeur que donnerait pour x la résolution du système obtenu en remplaçant respectivement, dans les équations normales, le second membre de la première par 1 et le second membre de chacune des autres par zéro. Pour y, c'est dans la deuxième équation qu'il faut remplacer le second membre par 1; pour z, c'est dans la troisième, etc.

Quant à ε, il peut se faire qu'il soit donné *a priori* par la connaissance de l'instrument employé; mais souvent la précision des mesures l_1, ..., l_n est inconnue, et l'on est condamné à l'évaluer approximativement *a posteriori* d'après les valeurs fournies par la méthode des moindres carrés pour les inconnues. On adopte alors pour ε la valeur donnée par la formule

$$(16) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-m}}.$$

où $[\Delta\Delta]$ représente la somme des carrés des erreurs présumées des observations, c'est-à-dire la somme des carrés des valeurs que prennent les fonctions linéaires (13), lorsqu'on y remplace $x, y, z, \ldots$ par les valeurs fournies par la méthode des moindres carrés.

Cette formule (16) est la généralisation de la formule (10) relative au cas où il n'y a qu'une inconnue. Sa démonstration comporte une objection déjà indiquée à propos de la formule (10). La critique est fondée : M. Bertrand montre même qu'un raisonnement analogue permettrait d'obtenir pour le même objet une infinité d'autres formules infiniment différentes ; mais il ne faut pas confondre l'exactitude de la démonstration avec celle de la formule, et l'on peut sans témérité donner la préférence à la relation (16), proposée par Gauss et adoptée depuis par les calculateurs les plus compétents.

Dans un Mémoire dont certaines parties sont restées classiques et qui a pour titre : *Theoria combinationis observationum erroribus minimi obnoxiæ*, Gauss, délaissant le point de vue auquel il s'était placé dans le *Theoria motus*, a voulu affranchir l'exposition de la méthode des moindres carrés de la connaissance de la loi de probabilité des erreurs fortuites.

Sans rien préjuger sur la forme de la fonction $\varphi(z)$ qui représente la facilité de l'erreur z, Gauss donne le nom d'*erreur à craindre* à la quantité E définie par la relation

$$E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \varphi(z)\, dz,$$

c'est-à-dire à la racine carrée de la valeur probable du carré de l'erreur z. Il est clair que, si, dans un système d'observations, la valeur de E est petite, toute erreur qui n'est pas petite en valeur absolue a une probabilité très faible, sans quoi la valeur probable du carré de l'erreur ne serait pas très petite. Si, au contraire, E est grand, l'existence de grandes erreurs peut être supposée, leur probabilité n'est pas petite. On peut donc regarder *a priori* la valeur de E comme donnant la mesure du degré de confiance à accorder au système d'observations considéré.

En partant de cette idée, Gauss a été conduit à regarder comme le meilleur, non plus le système de valeurs de x, y, z, ... dont la probabilité est maxima, mais le système de va-

leurs de x, y, z, ... pour lesquelles l'erreur à craindre est minima. C'est un postulatum fort plausible, mais c'est un postulatum ; Gauss d'ailleurs ne le dissimule pas : « Quod si quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente necessitate, electam esse objiciat, lubenter assentiemus. Quippe questio hæc per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circonscribi nisi per principium aliquatenus arbitrarium nequet. »

La seconde théorie s'accorde d'ailleurs avec la première; elle conduit à la méthode des moindres carrés et, en particulier, à la règle de la moyenne arithmétique dans le cas des mesures réitérées d'une même grandeur. Les calculs de Gauss sont d'une élégance extrême; les principes de l'Algèbre élémentaire sont seuls mis à contribution et toutes les formules sont préparées d'une manière explicite pour le calculateur, qui n'a plus qu'à les mettre en nombres sans leur faire subir aucune transformation.

Il nous reste à dire encore quelques mots sur la moyenne arithmétique. La formule (15) montre que l'erreur à craindre E sur la moyenne arithmétique de n mesures est égale à l'erreur à craindre ε sur chacune d'elles divisée par $\sqrt{n}$. Il résulte d'ailleurs de la formule (10) que ε^2 est approximativement égal à la somme $[\Delta\Delta]$ des carrés des erreurs présumées divisées par $n-1$. On a donc finalement

$$E = \frac{[\Delta\Delta]}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

Lorsqu'une même grandeur X a été mesurée par des procédés différents ou par divers observateurs munis d'instruments d'inégale perfection, on ne doit plus prendre la moyenne arithmétique. Soient x_1, x_2, ..., x_n les mesures obtenues, et ε_1, ε_2, ..., ε_n les erreurs à craindre correspondantes. Si l'on cherche parmi les expressions de la forme

$$X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

où les λ doivent avoir une somme égale à l'unité, sans quoi la valeur à adopter ne serait pas exacte dans le cas où toutes les mesures le seraient, si l'on cherche, disons-nous, celle pour laquelle l'erreur à craindre est minimum, on trouve pour la

valeur à adopter

$$X = \frac{\frac{x_1}{\varepsilon_1^2} + \frac{x_2}{\varepsilon_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{\varepsilon_n^2}}{\frac{1}{\varepsilon_1^2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} + \ldots + \frac{1}{\varepsilon_n^2}},$$

c'est la moyenne, prise en comptant les mesures $x_1, \ldots, x_n$ comme répétées respectivement un nombre de fois égal à l'inverse du carré de l'erreur à craindre correspondante.

Le facteur $\frac{1}{\varepsilon^2}$ se nomme le *poids* de l'observation correspondante x. On voit par la formule ci-dessus que r observations semblables équivalent à une seule observation dont le poids serait r fois plus grand.

Cette notion de *poids*, telle que nous venons de l'établir, est indépendante de la forme de la loi des erreurs fortuites. Quand on considère la loi de Gauss, le poids est proportionnel à k^2. La précision ne saurait, au contraire, être définie avec rigueur que si la loi de probabilité revêt une forme spéciale; M. Bertrand démontre que la facilité de l'erreur $\varphi(z)$ doit avoir pour expression

$$C e^{-a z^{\mu+1}},$$

où $\mu + 1$ est pair. On tombe sur la loi de Gauss pour $\mu = 1$.

X. — Les fausses applications du Calcul des probabilités. Conclusions.

Les deux derniers Chapitres se rapportent à la Statistique et aux probabilités des décisions judiciaires. Ils sont relativement fort courts; leur véritable objet est d'achever de mettre en pleine lumière cette pensée originale qui est l'idée maîtresse de l'œuvre : l'application du Calcul des probabilités n'est légitime que pour les événements fortuits assimilables à une série de tirages dans une urne; autant vaut l'assimilation, autant valent les conséquences.

C'est pour avoir méconnu ou plutôt ignoré cette vérité fondamentale que tant de bons esprits se sont livrés à des recherches chimériques et se sont engagés dans des routes sans issue.

Une première condition, évidemment nécessaire pour l'assimilation, est l'invariabilité approchée du rapport entre le

nombre des événements et le nombre total des épreuves; mais elle ne suffit pas. Ce rapport constant ne fait connaître que la composition de l'urne; il faut encore que les probabilités d'écart soient les mêmes.

Prenons un exemple :

Les Tables de mortalité montrent que sur 10000 individus âgés de 30 ans, 500 environ survivent 35 ans après. D'autre part, si dans une urne qui contient une boule blanche et une boule noire, on effectue 10000 tirages en remettant chaque fois la boule sortie, on amènera environ 5000 fois la boule blanche. Y a-t-il assimilation? Non certes. Les nombres comparés diffèrent peu de 5000, voilà tout. Mais, dans le premier cas, l'écart est complètement inconnu; dans l'autre, il est soumis à des lois précises. On peut affirmer que, si l'on répète un grand nombre de fois la série des 10000 tirages, la valeur moyenne de l'écart sera 40; mais, pour un grand nombre de groupes de 10000 hommes, la moyenne générale des décès étant égale à 5000, qui oserait affirmer que la moyenne des écarts n'atteindra pas 100?

L'assimilation la plus téméraire qu'on ait jamais faite est assurément celle des jurés à des urnes. Ni les principes ni les conclusions de Condorcet ne sont acceptables. Aussi voit-on tour à tour Laplace rejeter les résultats de Condorcet, Poisson écarter ceux de Laplace, tandis que Arago ne craint pas d'affirmer à la Chambre des Députés, à propos d'une loi sur le jury, que les nombres de Laplace sont aussi certains que la parallaxe du Soleil! Cournot va même jusqu'à calculer, pour un tribunal de trois juges, la probabilité pour chacun d'eux de ne pas se tromper dans une cause qui leur est soumise!

M. Bertrand fait bonne justice de ces étranges tentatives. Le récit est piquant; mais on ne voit pas sans tristesse des hommes éminents, des savants distingués, se livrer ainsi à des calculs stériles dont Stuart Mill a pu dire, non sans raison, qu'ils étaient le scandale des Mathématiques.

Notre tâche est terminée. Nous l'aurions remplie à notre satisfaction, si nous étions parvenu à inspirer à nos lecteurs le désir de mieux connaître ce Livre si remarquable par l'élévation des idées, par la finesse des aperçus, par une critique ferme et incisive.

Quelques passages eussent gagné à être un peu condensés. Mais, si c'est là un défaut, il se trouve largement compensé

par les termes charmants en lesquels ces choses-là sont mises. L'agrément du style n'est pas la moindre qualité de l'Ouvrage, et nous ne saurions résister au plaisir d'ajouter, en finissant, quelques extraits :

« S'il pleut un jour entier sur la place du Carrousel, tous les pavés seront également mouillés. Sous une forme simplifiée, mais sans en rien retrancher, c'est là le théorème de Bernoulli. Il pourrait se faire assurément, lorsque tout autour la pluie tombe à torrents, qu'un certain pavé restât sec. Aucune goutte n'a pour lui de destination précise; le hasard les disperse, il peut les porter toutes sur les pavés voisins, personne ne le supposera sérieusement. Le hasard a des caprises; jamais on ne lui vit d'habitudes. Si mille gouttes tombent sur mille pavés, chaque pavé n'aura pas la sienne; s'il en tombe mille millions, chaque pavé recevra son million ou bien peu s'en faudra.

....

» Les grands nombres régularisent tout. La moyenne de tous les écarts peut être prédite avec confiance. La même certitude s'attache à la moyenne des carrés des écarts, de leurs cubes, de leurs quatrièmes puissances... ».

« Beaucoup de joueurs, préoccupés de cette régularité nécessaire dans les moyennes, cherchent, dans les coups qui précèdent celui qu'ils vont jouer, une indication et un conseil. Ce n'est pas bien entendre les principes. La Science, à ces chimères, ne reste pas sans réponse. Mais la décision du bon sens suffit; elle est nette et claire; à quoi bon la traduire en Algèbre? Le préjugé est opiniâtre; les géomètres perdraient, à le combattre, leur temps et leurs formules.

» L'illusion repose sur un sophisme; on allègue la loi de Bernoulli comme certaine; elle n'est que probable. Sur 20000 épreuves, dit-on, à la roulette, la noire ne peut pas sortir plus de 10500 fois; l'assertion de la Science est formelle. Si les 10000 premières parties ont donné 6000 noires, les 10000 suivantes ont donc contracté une dette envers la rouge. On fait trop d'honneur à la roulette; elle n'a ni conscience ni mémoire. En supposant qu'à une rencontre inouïe succédera, pour la séparer, un nouvel écart de la règle, on n'efface pas l'invraisemblance, on la redouble. »

EUGÈNE ROUCHÉ.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1888).

Mathématiques élémentaires.

Soient deux points A et A′, et deux droites D et D′ parallèles à AA′ et équidistantes de cette droite :

1° Démontrer qu'à tout point P pris sur la droite D correspond un point P′ pris sur la droite D′, tel que la droite PP′ soit tangente aux cercles S et S′ circonscrits l'un au triangle PAA′, l'autre au triangle P′AA′;

2° Trouver le lieu décrit par la projection de chacun des points A et A′ sur la droite PP′;

3° Construire les droites PP′ qui passent par un point donné Q;

4° Démontrer que les cercles S et S′ se coupent sous un angle constant;

5° Soit O le milieu du segment AA′, étudier les variations de l'angle POP′.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde S et deux points P et P′, et on considère les ellipses C et C′ suivant lesquelles l'ellipsoïde est coupé par les plans polaires des points P et P′ :

1° Démontrer que les coniques C et C′, et les points P et P′ sont situés sur une quadrique Σ, qui est en général unique;

2° Discuter cette quadrique en supposant que le point P′ se déplace dans l'espace, le point P et l'ellipsoïde S restant fixes;

3° Les points P et P′ étant supposés fixes et situés de façon que la quadrique Σ soit indéterminée, trouver le lieu du centre de cette quadrique;

4° En supposant que les points P et P′ se déplacent de façon que la quadrique Σ soit une sphère, trouver la surface enveloppe E de cette sphère;

5° Peut-on déterminer un point A, tel que la transformée par rayons vecteurs réciproques de la surface E, en prenant le point A pour pôle, soit un cône du second degré?

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Théorie. — Démontrer que, si l'aire d'une portion continue de surface Σ limitée par un contour fermé et donné est la plus petite possible, la somme des rayons de courbure principaux est nulle aux divers points de la portion de surface considérée.

Définition des surfaces minima. — Intégration de leur équation aux dérivées partielles. — Formules de Monge. — Formules de M. Weierstrass.

Application. — Trouver la surface minima réelle qui admet pour ligne géodésique la cycloïde définie en coordonnées rectangulaires par les équations

$$x = a(v - \sin v), \qquad y = a(1 - \cos v), \qquad z = 0;$$

2° Indiquer la forme de la surface : montrer que le plan des xy est un plan de symétrie et que les tangentes à la cycloïde en ses points de rebroussement sont des axes de symétrie de cette surface;

3° Montrer que la surface peut être coupée par une infinité de plans suivant des paraboles du second degré;

4° Former l'équation différentielle des lignes de courbure de la surface. Démontrer qu'un plan perpendiculaire à la base de la cycloïde et à égale distance de deux points de rebroussement consécutifs de cette courbe coupe la surface suivant une ligne de courbure.

Composition de Mécanique rationnelle.

Théorie. — Les équations du mouvement d'un système matériel étant supposées mises sous la forme canonique, montrer comment Jacobi a ramené l'intégration de ces équations à la recherche d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Application. — Étant donné un hyperboloïde à une nappe représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où l'on suppose $a < b$, déterminer le mouvement d'un point matériel non pesant dont la masse est égale à l'unité, qui est assujetti à rester sur la surface de l'hyperboloïde et qui est attiré vers le centre par une force égale au produit d'une constante ω^2 par la distance du mobile au centre. A l'instant initial, le mobile est situé dans le plan des xz à la distance b du centre, et sa vitesse v_0 est parallèle à l'axe des y.

Discuter les diverses formes que peut affecter la trajectoire suivant les valeurs de v_0; indiquer notamment les lignes de courbure de l'hyperboloïde entre lesquelles elle est comprise.

On déterminera la position du mobile sur l'hyperboloïde à une nappe à l'aide des coordonnées elliptiques λ et μ définies par les deux équations

$$\frac{x^2}{\lambda + a^2} + \frac{y^2}{\lambda + b^2} + \frac{z^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} - \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1,$$

en supposant

$$c^2 < \lambda \qquad \text{et} \qquad a^2 < \mu < b^2.$$

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VII, 3e SÉRIE).

Algèbre.

Géométrie pure.

Géométrie analytique à deux dimensions.

Géométrie analytique à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Questions proposées.

Sujets de composition donnés à divers concours.

Mélanges.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME VII, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

13672 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

